Couche 1 :
Exercices à traiter par ordre.

Réduction d'endomorphismes et de matrices

3

Exercice 1

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $f^3 + f = 0$.

1) Simplifier $f^2(x)$ pour tout $x \in Im(f)$.
2) Justifier que $Im(f)$ est stable par f.
   Notons f_1 l'endomorphisme induit par f sur $Im(f)$
3) Montrer que f_1 est un automorphisme de $Im(f)$.
4) Dans cette question, on suppose que f est de rang fini. Montrer que $rg(f)$ est un entier pair.

1

Exercice 2

Diagonaliser les matrices suivantes quand c'est possible :

A$=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, B$=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, C$=\begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

D$=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, E$=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

2

Exercice 3

Trigonaliser les matrices suivantes :

A$=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$, B$=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, C$=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Exercice 4

Déterminer les éléments propres des endomorphismes suivants :

1) E l'espace des suites réelles bornées, et $f \in \mathcal{L}(E)$ défini par

$$\forall u \in E,\ \forall n \in \mathbb{N},\ f(u)(n) = u_{n+1} - u_n$$

2) $E = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $\phi \in \mathcal{L}(E)$ défini par :

$$\forall f \in E,\ \phi(f) = f'$$

4

Exercice 5

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$, où $n \geq 1$. Supposons que $rg(f) = 1$.

1) Montrer que tout vecteur non nul de $Im(f)$ est un vecteur propre de f.

2) Montrer que

$$f \text{ est diagonalisable } \Leftrightarrow f^2 \neq 0$$

Exercice 6

L'objectif de cet exercice est de résoudre l'équation matricielle :

$$(E)\ X^3 + X = 0\ ,\ X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

Soit A une matrice non nulle solution de (E).

1) Montrer que

$$\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) = ker(A) \oplus ker(A^2 + I_3)$$

2) Montrer que

$$\forall\ Y \notin ker(A),\ (Y, AY) \text{ est libre}$$

3) Déterminer le polynôme minimal de A.

4) Montrer que $dim(ker(A)) = 1$

5) En déduire que A est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

6) Quelles sont enfin les solutions de l'équation (E) ?

Exercice 7

Soit A une matrice non nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, de trace non nulle.
Considérons l'application f définie de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vers lui-même par :

$$f(M) = tr(A)M - tr(M)A$$

Notons $F = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\ /\ tr(M) = 0\}$

1) Justifier que $f \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$

2) Montrer que A est vecteur propre de f associé à la valeur propre 0, puis que $dim(E_0(f)) = 1$

3) Montrer que $Im(f) = F$, en précisant $dim(F)$.

4) Montrer F est le sous-espace propre de f associé à la valeur propre $tr(A)$.

5) Déduire que f est diagonalisable.

Exercice 8

Diagonaliser les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

8

Exercice 9

Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ où $n \geq 2$.

1) Montrer que M est diagonalisable.
2) Déterminer le polynôme minimal de M.
3) Calculer M^p pour tout $p \in \mathbb{N}$.

6

Exercice 10

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $M^2 + {}^tM = I_n$

1. Montrer que
$$1 \notin S_p(M) \iff M \textit{ est inversible}$$
2. Montrer que M est digonalisable.

Exercice 11

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et soit $u \in \mathcal{L}(E)$ qui n'est pas une homothétie.
Supposons l'existence de deux réels distincts a et b tels que :
$$(u - aI_E)(u - bI_E) = 0$$
Posons $p = \frac{1}{b-a}(u - aI_E)$ et $q = \frac{1}{a-b}(u - bI_E)$.

1) Calculer $p+q,\ pq,\ qp,\ p^2$ et q^2
2) En déduire que $E = ker(p) \oplus ker(q)$.
3) Justifier autrement pourquoi on a $E = ker(p) \oplus ker(q)$.
4) Déterminer les éléments propres de u, puis justifier que u est diagonalisable.

7

Exercice 12

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Considérons l'application ϕ définie de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vers lui-même par :
$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \phi(M) = AM - MB$$
α et β sont deux valeurs propres respectives de A et B.

1) Vérifier que $\phi \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$.
2) Justifier l'existence de deux matrices colonnes non nulles C et D telles
$$AC = \alpha C \textit{ et } {}^tBD = \beta D$$
3) Calculer $\phi(C\,{}^tD)$ en fonction de C, D, α et β.
4) En déduire que $(\alpha - \beta)$ est valeur propre de ϕ.