

Ce qui est marqué en jaune est corrigé à présent.
Je corrigerais le reste après.

STRUCTURES ALGÈBRIQUES LES GROUPES

Exercice 1 :

Soit $(G, .)$ un groupe.

Définition : On appelle **centre** de G , qu'on note $\mathbf{Z}(G)$, la partie de G définie par

$$Z(G) = \{x \in G \mid \forall g \in G, gx = xg\}$$

- 1) Montrer que $Z(G)$ est un sous-groupe de G .
- 2) Soit $n > 1$. Déterminer le centre de $GL_n(\mathbb{K})$.

Exercice 2 :

Quels sont les sous-groupes finis de $\mathbb{C}^*$?

Exercice 3 :

Soient $(G, .)$ un groupe multiplicatif et L un sous-groupe, avec $L \neq G$.
Déterminer $\langle \bar{L} \rangle$, le sous-groupe engendré par le complémentaire de L .

Exercice 4 :

Soit $(G, .)$ un groupe multiplicatif fini, de neutre e et de cardinal n .
Soit H un sous-groupe de G . Notons $\text{card}(H) = p$.
Considérons la relation binaire $\mathcal{R}$ définie sur G par

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow xy^{-1} \in H$$

- 1) Montrer qu'il s'agit d'une relation d'équivalence sur G .
- 2) Soient $g \in G$ et $\bar{g}$ sa classe d'équivalence.
 - i) Expliciter $\bar{g}$.
 - ii) Montrer que $\bar{g}$ est équipotent à H .
- 3) Dédire que $p|n$.
*C'est le **théorème de Lagrange**.*
- 4) En déduire le résultat du cours :

$$\forall g \in G, g^n = e$$

Exercice 5 :

Soit $(G, .)$ un groupe fini, de neutre e et de cardinal n , vérifiant que

$$\forall g \in G, g^2 = e$$

- 1) Montrer que G est commutatif.
- 2) Soient H un sous-groupe de G et $x \notin H$.
Montrer que $K = H \cup xH$ est un sous-groupe de G et que $\text{card}(K) = 2 \times \text{card}(H)$.
- 3) En déduire que $\mathbf{n}$ est une puissance de 2.

Exercice 6 :

Soit H un sous-groupe non nul de $\mathbb{R}$.

Notons $H^+ = H \cap]0, +\infty[$ et $\alpha = \inf(H^+)$.

1. Justifier d'abord l'existence de α .
2. Supposons ici que $\alpha > 0$.
Montrer que $\alpha \in H^+$ et que $H = \alpha\mathbb{Z}$; où $\alpha\mathbb{Z} = \{\alpha m \mid m \in \mathbb{Z}\}$.
3. Supposons maintenant que $\alpha = 0$.
On se propose de montrer que H est dense dans $\mathbb{R}$.
Soient alors $x < y$ deux réels.
 - i) Montrer que
$$\exists h \in H, 0 < h < y - x$$
 - ii) Conclure.

Exercice 7 :

Soient $(G, \cdot)$ un groupe fini et ψ un morphisme de G vers le groupe $\mathbb{C}^*$.

Supposons que ψ n'est pas une application constante.

Montrer que $\sum_{g \in G} \psi(g) = 0$.

STRUCTURES ALGÈBRIQUES

LES GROUPES

Exercice 1 :

Soit $(G, .)$ un groupe.

Définition : On appelle **centre** de G , qu'on note $Z(G)$, la partie de G définie par

$$Z(G) = \{x \in G \mid \forall g \in G, gx = xg\}$$

1) Montrer que $Z(G)$ est un sous-groupe de G .

Solution

Soit $x \in G$. On a : $x \in Z(G) \Leftrightarrow (\forall g \in G, gx = xg)$

Montrons que $Z(G)$ est un sous-groupe de $(G, .)$.

i) On a $e \in Z(G)$ car $(\forall g \in G, ge = eg = e)$

ii) Soient $x, y \in Z(G)$.

Montrons $xy^{-1} \in Z(G)$.

Soit alors $g \in G$.

Il s'agit de montrer que $g(xy^{-1}) = (xy^{-1})g$

On a :

$$\begin{aligned} g(xy^{-1}) &= gx y^{-1} \\ &= xgy^{-1} \quad (gx = xg \text{ car } x \in Z(G)) \end{aligned}$$

$$\text{Et on a } y \in Z(G) \Rightarrow gy = yg$$

$$\Rightarrow y^{-1}gy = g$$

$$\Rightarrow y^{-1}g = gy^{-1}$$

donc :

$$g(xy^{-1}) = x y^{-1} g$$

$$= (xy^{-1})g$$

CQFD

Enfin : $Z(G)$ est un sous-groupe de $(G, \cdot)$



Soit $(G, \cdot)$ un groupe.

Définition : On appelle **centre** de G , qu'on note $\mathbf{Z}(G)$, la partie de G définie par

$$Z(G) = \{x \in G \mid \forall g \in G, gx = xg\}$$

- 1) Montrer que $Z(G)$ est un sous-groupe de G .
- 2) Soit $n > 1$. Déterminer le centre de $GL_n(\mathbb{K})$.

Solution

$(GL_n(\mathbb{K}), \cdot)$ est un groupe.

Déterminons $Z(GL_n(\mathbb{K}))$

Soit $A = (A_{ij}) \in GL_n(\mathbb{K})$.

$$A \in Z(GL_n(\mathbb{K})) \Leftrightarrow (\forall M \in GL_n(\mathbb{K}), AM = MA)$$

$$\Rightarrow \forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, A(I_n + E_{ij}) = (I_n + E_{ij})A$$

Car $(I_n + E_{ij})$ est une matrice inversible.

$$\Rightarrow \forall i, j, A + AE_{ij} = A + E_{ij}A$$

$$\Rightarrow \forall i, j, AE_{ij} = E_{ij}A$$

Or on a $A = \sum_{1 \leq k, l \leq n} A_{kl} E_{kl}$, alors :

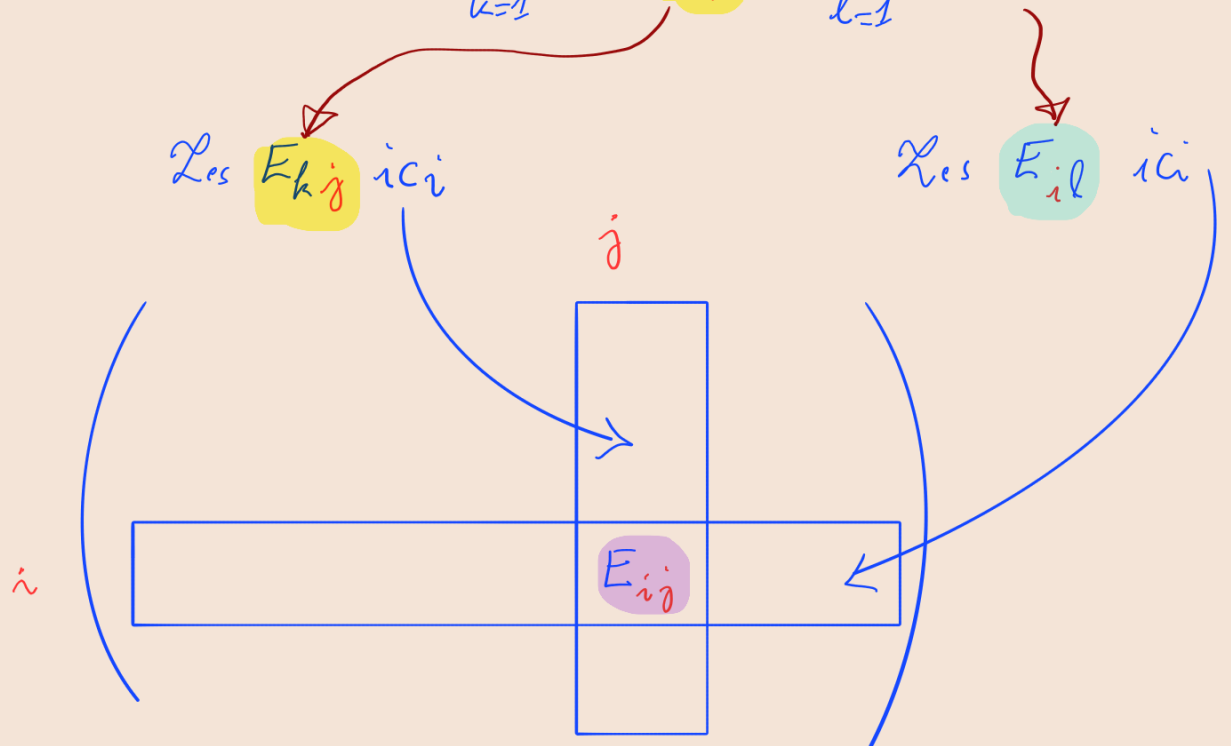
$$A \in Z(GL_n(\mathbb{K})) \Rightarrow \forall i, j, \left(\sum_{1 \leq k, l \leq n} A_{kl} E_{kl} \right) E_{ij} = E_{ij} \left(\sum_{1 \leq k, l \leq n} A_{kl} E_{kl} \right)$$

$$\Rightarrow \forall i, j, \sum_{k, l} A_{kl} \underbrace{E_{kl} E_{ij}}_{\hookrightarrow = \delta_{li} E_{kj}} = \sum_{k, l} A_{kl} \underbrace{E_{ij} E_{kl}}_{\hookrightarrow = \delta_{jk} E_{il}}$$

$$\Rightarrow \forall i, j, \sum_{k,l} A_{kl} \delta_{li} E_{kj} = \sum_{k,l} A_{kl} \delta_{jk} E_{il}$$

$$\Rightarrow \forall i, j, \sum_k \left(\underbrace{\sum_l A_{kl} \delta_{li} E_{kj}}_{= A_{ki} E_{kj}} \right) = \sum_l \left(\underbrace{\sum_k A_{kl} \delta_{jk} E_{il}}_{= A_{jl} E_{il}} \right)$$

$$\Rightarrow \forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sum_{k=1}^n A_{ki} E_{kj} = \sum_{l=1}^n A_{jl} E_{il}$$



$$\Rightarrow \forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sum_{k=1}^n A_{ki} E_{kj} = \sum_{k=1}^n A_{jk} E_{ik}$$

$$\Rightarrow \forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, A_{ii} E_{ij} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n A_{ki} E_{kj} = A_{jj} E_{ij} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n A_{jk} E_{ik}$$

$$\Rightarrow \forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, (A_{ii} - A_{jj}) E_{ij} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n A_{ki} E_{kj} - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n A_{jk} E_{ik} = 0$$

Or E_{ij} , les E_{ki} avec $k \neq i$ et les E_{ik} avec $k \neq j$ forment une famille libre, en tant que sous famille de la base canonique de $M_n(\mathbb{K})$.

D'où :

$$\forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \begin{cases} A_{ii} = A_{jj} \\ \forall k \neq i, A_{ki} = 0 \\ \forall k \neq j, A_{jk} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, A_{ii} = A_{jj} \\ \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \forall k \neq i, A_{ki} = 0 \end{cases}$$

La matrice A devient alors : $A = \begin{pmatrix} A_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_{11} \end{pmatrix} = A_{11} I_n$

Ainsi : $A \in Z(GL_n(\mathbb{K})) \Rightarrow (\exists \lambda \in \mathbb{K}, A = \lambda I_n)$

Or A est inversible, alors $\lambda \neq 0$.

D'où : $A \in Z(GL_n(\mathbb{K})) \Rightarrow (\exists \lambda \in \mathbb{K}^*, A = \lambda I_n)$

Réciproquement : Si $(\exists \lambda \in \mathbb{K}^*, A = \lambda I_n)$, alors $A \in Z(GL_n(\mathbb{K}))$
Car $(\forall M \in GL_n(\mathbb{K}), (\lambda I_n) \cdot M = M \cdot (\lambda I_n))$

Conclusion :

$$A \in Z(GL_n(K)) \Leftrightarrow (\exists \lambda \in K^*, A = \lambda I_n)$$

Câd

$$Z(GL_n(K)) = \{ \lambda I_n / \lambda \in K^* \}$$

Fin Exercice 1

Exercice 2 :

Quels sont les sous-groupes finis de $\mathbb{C}^*$?

Solution

Soit H un sous-groupe fini du groupe $(\mathbb{C}^*, \times)$.

Notons $\text{Card}(H) = n$.

Alors $(H, \times)$ est un groupe fini de cardinal n .

$\Rightarrow (\forall z \in H, z^n = 1)$: puisque 1 son élément neutre.

$\Rightarrow (\forall z \in H, z \in \mathbb{L}_n)$: où $\mathbb{L}_n$ est l'ensemble des racines n ème de l'unité.

Ainsi : $H \subset \mathbb{L}_n$

Or $\text{Card}(H) = \text{Card}(\mathbb{L}_n) (=n)$

D'où l'égalité $H = \mathbb{L}_n$

On a ainsi montré que :

Si H est un sous-groupe fini de $(\mathbb{C}^*, \times)$, alors H est de la forme $H = \mathbb{L}_n$, où $n \in \mathbb{N}^*$.

Réciproquement, les $\mathbb{L}_n$, où $n \in \mathbb{N}^*$, sont des sous-groupes finis de $(\mathbb{C}^*, \times)$.

Conclusion :

Les sous-groupes finis de $(\mathbb{C}^*, \times)$ sont les $\mathbb{U}_n$, où $n \in \mathbb{N}^*$.

Avec $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines nème de l'unité.

Fin Exercice 2

Exercice 3 :

Soient $(G, \cdot)$ un groupe multiplicatif et L un sous-groupe, avec $L \neq G$.
Déterminer $\langle \bar{L} \rangle$, le sous-groupe engendré par le complémentaire de L .

Solution

$\langle \bar{L} \rangle$ contient $\bar{L}$.

$\bar{L}$ contient aussi L ; en effet :

Soit $l \in L$. Montrons que $l \in \langle \bar{L} \rangle$.

$L \neq G \Rightarrow (\exists g_0 \in G \text{ tel que } g_0 \notin L)$

On a $\begin{pmatrix} l \in L \\ g_0 \notin L \\ L \text{ sous-groupe de } G \end{pmatrix}$

donc $lg_0 \notin L$; car sinon, on aurait $l^{-1} \cdot (lg_0) = g_0 \in L$

$\Rightarrow lg_0 \in \bar{L} \subset \langle \bar{L} \rangle$

Or $\langle \bar{L} \rangle$ s.-groupe de G et $g_0 \in \bar{L} \subset \langle \bar{L} \rangle$

Alors $(lg_0) \cdot g_0^{-1} \in \langle \bar{L} \rangle$

$\Rightarrow l \in \langle \bar{L} \rangle$

$\langle \bar{L} \rangle$ contient L et $\bar{L}$ donc $\langle \bar{L} \rangle \supset (L \cup \bar{L}) = G$

$\Rightarrow \langle \bar{L} \rangle = G$

Fin Exercice 3

Exercice 4 :

Soit $(G, .)$ un groupe multiplicatif fini, de neutre e et de cardinal $\mathbf{n}$.
Soit H un sous-groupe de G . Notons $\text{card}(H) = p$.
Considérons la relation binaire $\mathcal{R}$ définie sur G par

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow xy^{-1} \in H$$

1) Montrer qu'il s'agit d'une relation d'équivalence sur G .

Solution

Facile.

Soit $(G, \cdot)$ un groupe multiplicatif fini, de neutre e et de cardinal n .

Soit H un sous-groupe de G . Notons $\text{card}(H) = p$.

Considérons la relation binaire $\mathcal{R}$ définie sur G par

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow xy^{-1} \in H$$

1) Montrer qu'il s'agit d'une relation d'équivalence sur G .

2) Soient $g \in G$ et $\bar{g}$ sa classe d'équivalence.

i) Expliciter $\bar{g}$.

Solution

$$\begin{aligned} \bar{g} &= Hg, \text{ où } Hg = \{hg / h \in H\} \\ \boxed{x \in \bar{g}} &\Leftrightarrow x\mathcal{R}g \Leftrightarrow xg^{-1} \in H \Leftrightarrow (\exists h \in H, xg^{-1} = h) \\ &\Leftrightarrow (\exists h \in H, x = hg) \Leftrightarrow \boxed{x \in Hg} \end{aligned}$$

Soit $(G, \cdot)$ un groupe multiplicatif fini, de neutre e et de cardinal n .
Soit H un sous-groupe de G . Notons $\text{card}(H) = p$.
Considérons la relation binaire $\mathcal{R}$ définie sur G par

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow xy^{-1} \in H$$

- 1) Montrer qu'il s'agit d'une relation d'équivalence sur G .
- 2) Soient $g \in G$ et $\bar{g}$ sa classe d'équivalence.
 - i) Expliciter $\bar{g}$.
 - ii) Montrer que $\bar{g}$ est équipotent à H .

Solution

Une application naturelle de H vers Hg est :

$$\begin{aligned} f: H &\longrightarrow Hg \\ h &\longmapsto hg \end{aligned}$$

f est bijective ; en effet :

- f surjective par construction.
- Injective. (Évident)

Soit $(G, .)$ un groupe multiplicatif fini, de neutre e et de cardinal n .
 Soit H un sous-groupe de G . Notons $\text{card}(H) = p$.
 Considérons la relation binaire $\mathcal{R}$ définie sur G par

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow xy^{-1} \in H$$

- 1) Montrer qu'il s'agit d'une relation d'équivalence sur G .
- 2) Soient $g \in G$ et $\bar{g}$ sa classe d'équivalence.
 - i) Expliciter $\bar{g}$.
 - ii) Montrer que $\bar{g}$ est équipotent à H .
- 3) Dédurre que $p|n$.
 C'est le **théorème de Lagrange**.

Solution

Notons $\bar{g}_1, \dots, \bar{g}_n$ les classes d'équivalences de G .
 Elles forment une partition de G .

$$\begin{aligned} \text{Donc } \text{card}(G) &= \sum_{i=1}^n \text{card}(\bar{g}_i) \\ &= \sum_{i=1}^n \text{card}(H) \quad (\text{d'après 2/ii}) \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \text{Card}(G) = n \cdot \text{card}(H)$$

$$\Rightarrow \text{card}(H) \mid \text{card}(G)$$

Soit $(G, .)$ un groupe multiplicatif fini, de neutre e et de cardinal n .
 Soit H un sous-groupe de G . Notons $\text{card}(H) = p$.
 Considérons la relation binaire $\mathcal{R}$ définie sur G par

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow xy^{-1} \in H$$

- 1) Montrer qu'il s'agit d'une relation d'équivalence sur G .
- 2) Soient $g \in G$ et $\bar{g}$ sa classe d'équivalence.
 - i) Expliciter $\bar{g}$.
 - ii) Montrer que $\bar{g}$ est équipotent à H .
- 3) Dédire que $p|n$.
 C'est le **théorème de Lagrange**.
- 4) En déduire le résultat du cours :

$$\forall g \in G, g^n = e$$

Solution

L'ordre de l'élément g est égal au cardinal du
 s-groupe engendré par g .

Soit $g \in G$. On sait que $o(g) = \text{card}(\langle g \rangle)$

$$\text{et } 3) \Rightarrow \text{card}(\langle g \rangle) \mid \text{card}(G) \\ \Rightarrow o(g) \mid \text{card}(G)$$

D'autre part, $g^{o(g)} = e$
 D'où $g^{\frac{\text{card}(G)}{p}} = e$

Fin Exercice 4

Exercice 5 :

Soit $(G, .)$ un groupe fini, de neutre e et de cardinal n , vérifiant que

$$\forall g \in G, g^2 = e$$

1) Montrer que G est commutatif.

Solution

$$g^2 = e \Leftrightarrow g^{-1} = g$$

$$\text{Ainsi } (xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1} = yx$$

Soit $(G, .)$ un groupe fini, de neutre e et de cardinal n , vérifiant que

$$\forall g \in G, g^2 = e$$

- 1) Montrer que G est commutatif.
- 2) Soient H un sous-groupe de G et $x \notin H$.
Montrer que $K = H \cup xH$ est un sous-groupe de G et que $\text{card}(K) = 2 \times \text{card}(H)$.

Solution

2) i)

K s-groupe de G ?

Soient $a, b \in K = H \cup xH$. Montrer que $ab^{-1} \in K$.

Distinguer les cas :

$$\begin{cases} a \in H \text{ et } b \in H \\ a \in xH \text{ et } b \in xH \\ a \in H \text{ et } b \in xH \\ a \in xH \text{ et } b \in H \end{cases}$$

2) ii)

$\text{Card}(K) \stackrel{?}{=} 2 \text{ card}(H)$.

H et xH sont disjoints.

Soit $(G, .)$ un groupe fini, de neutre e et de cardinal n , vérifiant que

$$\forall g \in G, g^2 = e$$

- 1) Montrer que G est commutatif.
- 2) Soient H un sous-groupe de G et $x \notin H$.
Montrer que $K = H \cup xH$ est un sous-groupe de G et que $\text{card}(K) = 2 \times \text{card}(H)$.
- 3) En déduire que n est une puissance de 2.

Solution

Si $G = \{e\}$; $\text{Card}(G) = 1 = 2^0$

Si non. On a $G \neq \{e\}$.

Soit $x_1 \neq e$. Notons $H_1 = \langle x_1 \rangle$.

$$\text{Card}(H_1) = o(x_1) = 2 \quad \begin{cases} \text{Car} \\ x_1 \neq e \\ x_1^2 = e \end{cases}$$

Si $G = H_1$, c'est fini.

Si non, on a $G \neq H_1$.

Soit $x_2 \notin H_1$.

$$\begin{cases} H_2 = H_1 \sqcup (x_2 \cdot H_1) \text{ sep} \\ \text{Card}(H_2) = 2 \text{ Card}(H_1) = 2^2 \end{cases}$$

Ainsi de suite : Le processus va s'arrêter.

On aura :

$$\begin{cases} \text{Card}(H_i) = 2^i \\ H_i = G \end{cases}$$

Méthode 2

Par récurrence forte sur le cardinal n de G .

↳ Pour $n=1$, $\text{Card}(G) = 2^0$

↳ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que la propriété est vraie jusqu'à n et qu'elle est vraie pour $(n+1)$.

Soit $(G, \cdot)$ groupe de cardinal $(n+1)$ et vérifiant :

$$(\forall a \in G, a^2 = e)$$

Soit H un sous-groupe strict de G : ça existe car le cas de $\{e\}$.

Prenons H comme étant de plus grand cardinal.

$$\text{Soit } a \notin H. \quad \begin{cases} H \cup (aH) \text{ s-groupe de } G \\ \text{Card}(H \cup (aH)) = 2 \text{Card}(H) \end{cases}$$

Or $\text{Card}(H) \leq n$ et $(\forall h \in H, h^2 = e)$

Mais par hypothèse de récurrence, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\text{Card}(H) = 2^p$.

Ainsi, $H \cup (aH)$ s-groupe de G de cardinal 2^{p+1} .

Or $H \cup (aH) = G$ par définition de H .

D'où la conclusion.

Fin Exercice 5

Exercice 7 :

Soient $(G, \cdot)$ un groupe fini et ψ un morphisme de G vers le groupe $\mathbb{C}^*$.
Supposons que ψ n'est pas une application constante.

Montrer que $\sum_{g \in G} \psi(g) = 0$.

Solution

Soit $a \in G$. On a $G = \{ag \mid g \in G\}$ (clair par double implication)

$$\text{Donc } \sum_{g \in G} \psi(g) = \sum_{g \in G} \psi(ag)$$

$$= \sum_{g \in G} \psi(a) \times \psi(g) \quad \left(\begin{array}{l} \text{Car } \psi \text{ morphisme} \\ \text{de } (G, \cdot) \text{ vers } (\mathbb{C}^*, \times) \end{array} \right)$$

$$= \psi(a) \cdot \sum_{g \in G} \psi(g)$$

$$\Rightarrow (1 - \psi(a)) \cdot \left(\sum_{g \in G} \psi(g) \right) = 0 \quad (\Omega)$$

D'autre part :

$$\psi \text{ constante} \Leftrightarrow (\forall x \in G, \psi(x) = \psi(e))$$

$$\Leftrightarrow (\forall x \in G, \psi(x) = 1)$$

Or ψ constante, alors il existe $a \in G$ tel que $\psi(a) \neq 1$.

De (Ω) on tire que $\sum_{g \in G} \psi(g) = 0$

Fin Exercice 6

