Probabilités
Partie 3

Dans toute cette partie, (Ω, T, P) est un espace probabilisé.

Cette partie constitue la suite de Partie 1 et Partie 2.

1) Fonction de répartition d'une var

Déf 1

Soit X une var sur Ω.
La fonction de répartition de X, notée F_X, est définie par:

$$\boxed{F_X : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \; ; \; F_X(x) = P(X \leq x)}$$

Déf 2

1) Soient X et Y deux var.

La fonction de répartition du couple (X,Y), notée $F_{(X,Y)}$, est définie par:

$$\boxed{F_{(X,Y)} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad F_{(X,Y)}(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y)}$$

2) Soient $X_1, \dots, X_n$ des var.

La fonction de répartition de $(X_1, \dots, X_n)$, notée $F_{(X_1, \dots, X_n)}$ est définie par:

$$F_{(X_1, \dots, X_n)} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$F_{(X_1, \dots, X_n)}(x_1, \dots, x_n) = P(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n)$$

Propriétés 3

Soient X une var et F sa fonction de répartition. On a :

1) F est Croissante sur $\mathbb{R}$.

2) F est Continue à droite en tout point de $\mathbb{R}$.

3) Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a :

i) $\lim\limits_{x \to a^-} F(x) = P(X < a)$

ii) F Continue en $a \iff P(X = a) = 0$

4) $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$.

Démo

1) F est Croissante sur $\mathbb{R}$?

$\boxed{F(x) = P(X \leq x)}$

Rappel

Supp que $x \leq y$ et Mq que $F(x) \leq F(y)$.

Càd Mq que $P(X \leq x) \leq P(X \leq y)$.

On a $(X \leq x) \subset (X \leq y)$ car $x \leq y$

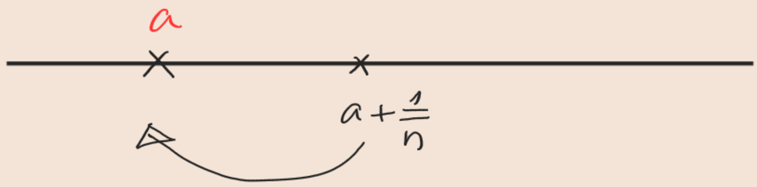
D'où $P(X \leq x) \leq P(X \leq y)$ $\square$

2) F est Continue à droite en tout point de $\mathbb{R}$?

$\boxed{F(x) = P(X \leq x)}$

Rappel

Soit $a \in \mathbb{R}$. Mq que $\lim\limits_{x \to a^+} F(x) = F(a)$.



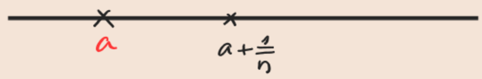
$$\lim_{x \to a^+} F(x) = \lim_{n \to +\infty} F\left(a + \frac{1}{n}\right)$$

$$= \lim_{n \to +\infty} P\left(X \leq a + \frac{1}{n}\right)$$

Or : $\begin{cases} \forall n \geq 1, \ \left(X \leq a + \frac{1}{n+1}\right) \subset \left(X \leq a + \frac{1}{n}\right) \\ \text{Car } a + \frac{1}{n+1} \leq a + \frac{1}{n} \end{cases}$

Alors $\left(\left(X \leq a + \frac{1}{n}\right)\right)_{n \geq 1}$ est décroissante.

D'où $\lim\limits_{n \to +\infty} P\left(X \leq a + \frac{1}{n}\right) = P\Big(\underbrace{\bigcap_{n=1}^{+\infty} \left(X \leq a + \frac{1}{n}\right)}_{=(X \leq a)}\Big)$



$$\Longrightarrow \lim_{n \to +\infty} P\left(X \leq a + \frac{1}{n}\right) = P(X \leq a)$$

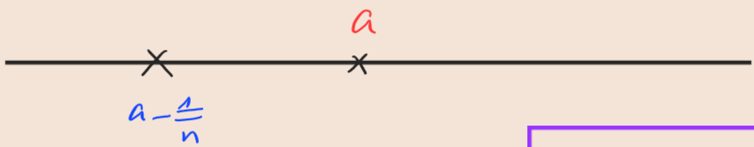
Ainsi : $\lim\limits_{x \to a^+} F(x) = P(X \leq a)$

$= F(a)$

---

3) Soit $a \in \mathbb{R}$, on a :

i) $\lim\limits_{x \to a^-} F(x) = P(X < a)$



$\boxed{F(x) = P(X \leq x)}$

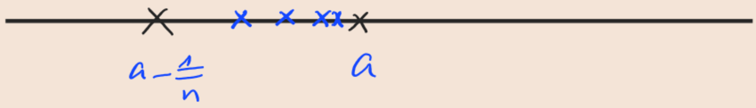
Rappel

$$\lim_{x \to a^-} F(x) = \lim_{n \to +\infty} F\left(a - \frac{1}{n}\right)$$

$$= \lim_{n} P\left(X \leq a - \frac{1}{n}\right)$$

Or $\left(X \leq a - \frac{1}{n}\right)_{n \geq 1}$ est $\nearrow$ alors :

$$\lim_{n} P\left(X \leq a - \frac{1}{n}\right) = P\left(\bigsqcup_{n=1}^{+\infty} \left(X \leq a - \frac{1}{n}\right)\right)$$



Et on a : $\bigsqcup_{n=1}^{+\infty} \left(X \leq a - \frac{1}{n}\right) = (X < a)$

D'où $\lim_{n} P\left(X \leq a - \frac{1}{n}\right) = P(X < a)$

Enfin : $\boxed{\lim_{x \to a^-} F(x) = P(X < a)}$

$\square$

ii) F continue en $a \iff P(X = a) = 0$?

F continue en $a \iff F$ continue à gauche en a (car déjà cont à droite)

$\iff \lim_{x \to a^-} F(x) = F(a)$

$\boxed{F(x) = P(X \leq x)}$

Rappel

$\iff P(X < a) = P(X \leq a)$

S! $\iff P(X < a) = P(X = a) + P(X < a)$

$\iff P(X = a) = 0$

$\square$

---

4) $F \nearrow$ sur $\mathbb{R}$, alors $\lim_{x \to -\infty} F(x)$ et $\lim_{x \to +\infty} F(x)$ existent (dans $\overline{\mathbb{R}}$)

i) $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$?

$\lim_{x \to -\infty} F(x) = \lim_{n \to +\infty} F(-n)$

$\boxed{F(x) = P(X \leq x)}$

Rappel

$= \lim_{n \to +\infty} P(X \leq -n)$

Or $(X \leq -n)_n$ est $\downarrow$ $\left(\begin{array}{l} (X \leq -(n+1)) \subset (X \leq -n) \\ \text{car } -(n+1) \leq -n \end{array} \right)$

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} P(X\leq -n) = P\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty}(X\leq -n)\right)$

Or $\bigcap_{n=0}^{+\infty}(X\leq -n) = \emptyset$

D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} P(X\leq -n) = P(\emptyset)$

$= 0$

$\Rightarrow$ $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0}$ $\square$

ii) $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$?

$\boxed{F(x) = P(X\leq x)}$

Rappel

$\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} F(n)$

$= \lim\limits_{n} P(X\leq n)$

Or $(X\leq n)_n$ est $\nearrow$ $\left(\begin{array}{l}(X\leq n)\subset(X\leq n+1)\\ \text{Car } n\leq n+1\end{array}\right)$

Alors $\lim\limits_{n} P(X\leq n) = P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty}(X\leq n)\right)$

Et on a : $\bigcup_{n=0}^{+\infty}(X\leq n) = \Omega$

$n \quad n+1 \quad \cdots$

D'où $\lim\limits_{n} P(X\leq n) = P(\Omega) = 1$

Enfin $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1}$ $\square$

Prop 4

Soit X une var.

Si on connait la loi de X, alors on connaitra sa fonction de répartition. Et inversement.

Démo

1) Supposons connaitre la loi de X.

$P(X \in I)$ connu $\forall I$ int

Mq que la fonction de répartition F_X sera connue.

On a $F_X(x) = P(X \leq x)$

$= P(X \in]-\infty, x]) \quad \square$

2) Supposons connaitre la fonction de répartition F_X.

Mq que la loi de X sera connue.

Càd que $P(X \in I)$ sera connue, pour tout intervalle I.

i) Si $I =]-\infty, a]$:

$P(X \in I) = P(X \leq a)$

$= F_X(a)$, donc connu. $\square$

ii) Si $I =]a, +\infty[$

$P(X \in I) = P(X > a)$

$= 1 - P(X \leq a)$

$= 1 - F_X(a)$ (connue)

$\square$

iii) Si $I =]-\infty, a[$

$$P(X \in I) = P(X < a)$$
$$= \lim_{t \to a^-} F_X(t) \quad \square$$

iv) Si $I = [a, b]$

$$P(X \in I) = P(a \leq X \leq b)$$
$$= P((X \leq b) \setminus (X < a))$$
$$= P(X \leq b) - P(X < a) \quad \left(\text{car } \overset{\text{Si}}{} (X < a) \overset{\text{alors}}{\subset} (X \leq b) \text{ car } a \leq b\right)$$
$$= F_X(b) - \lim_{t \to a^-} F_X(t) \quad \square$$

Les autres cas en exo.

Corollaire 5

Si F_X est continue sur $\mathbb{R}$, alors toutes les expressions suivantes sont égales :

1) $P(a \leq X \leq b)$
2) $P(a < X \leq b)$
3) $P(a \leq X < b)$
4) $P(a < X < b)$
5) $F_X(b) - F_X(a)$

Démo

Supp que F_X est continue sur $\mathbb{R}$, alors $\left(\forall t \in \mathbb{R},\ P(X=t)=0\right)$

i) M. que : $P(a \leq X \leq b) = P(a < X \leq b)$

$$P(a \leq X \leq b) = P(a < X \leq b) + \underbrace{P(X=a)}_{=0}$$

$$= P(a < X \leq b)$$

On montre de même que :

$$\boxed{P(a \leq X \leq b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X < b)}$$

ii) $F_X(b) - F_X(a) = P(X \leq b) - P(X \leq a)$

$$= P\big((X \leq b) \setminus (X \leq a)\big) \quad \begin{pmatrix} P(B \setminus A) = P(B) - P(A) \\ \text{si } A \subset B \end{pmatrix}$$

$$= P(a < X \leq b)$$

$\square$

2) Image d'une var

Notations

1) Soient $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une var et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

La composée $f \circ X$ se note $f(X)$.

2) Si X et $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ deux var et $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

$f \circ (X,Y)$ se note $f(X,Y)$.

3) Si $X_1, \dots, X_n : \Omega \to \mathbb{R}$ des var et $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

$f \circ (X_1, \dots, X_n)$ se note $f(X_1, \dots, X_n)$.

Prop 1

1) Si X et $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ deux var et $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continue, alors $f(X,Y)$ est aussi une var.

2) Si $X_1, \dots, X_n : \Omega \to \mathbb{R}$ des var et $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continue alors $f(X_1, \dots, X_n)$ est aussi une var.

Exemple

Si X et Y sont deux var, alors il en est de même pour :

1) $X+Y$; ($f : (x,y) \longmapsto x+y$ continue sur $\mathbb{R}^2$ car polynomiale.)

2) XY ; ($f : (x,y) \longmapsto xy$ continue sur $\mathbb{R}^2$ car polynomiale.)

3) $\max(X,Y)$; ($f(x,y) = \max(x,y) = \dfrac{x+y+|x-y|}{2}$; f continue sur $\mathbb{R}^2$ par opérations sur les ...)

4) $\min(X,Y)$ ...

Rappel

$$\max(a,b) = \frac{a+b+|a-b|}{2} \quad ; \quad \min(a,b) = \frac{a+b-|a-b|}{2}$$

NB

N'apprenez pas ces deux égalités par cœur, mais sachez comment les retrouver :

On a $\begin{cases} \max(a,b) + \min(a,b) = a+b \\ \max(a,b) - \min(a,b) = |a-b| \end{cases}$

Par sommation et par soustraction, on tire $\max(a,b)$ et $\min(a,b)$.

Prop 2

Si $\begin{pmatrix} \forall n \in \mathbb{N},\ X_n \text{ var} \\ (X_n)_n \text{ converge simplement vers } X \end{pmatrix}$ alors X var.

3) Indépendance héritée

Prop 1 (Rappel)

Si les var X et Y sont indépendantes, alors $f(X)$ et $g(Y)$ sont aussi indépendantes, pour toutes f et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues ou monotones.

Prop 2

Si $X_1, \dots, X_n, X_{n+1}, \dots, X_s$ sont indépendantes, alors $f(X_1, \dots, X_n)$ et $g(X_{n+1}, \dots, X_s)$ sont deux var indépendantes, où f et g continues.

Par exemple

1) Si X, Y et Z sont indépendantes alors il en est de même pour les var $(X+Y)$ et Z.

2) Si $X_1, \dots, X_n, X_{n+1}$ sont indépendantes alors il en est de même pour

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \quad \text{et} \quad X_{n+1}^2 .$$

4) Un système complet d'événements usuel

Prop

Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une var discrète.

Supposons que $X(\Omega) = D$ est dénombrable. On a :

1) $(X=d)_{d \in D}$ est un système complet d'événements.

2) $\left(P(X=d)\right)_{d \in D}$ est une famille sommable, et on a :

$$\sum_{d \in D} P(X=d) = 1$$

Démo

1) $(X=d)_{d \in D}$ est un système complet d'événements ?

i) Si $d \neq d'$, alors $(X=d) \cap (X=d') = \underset{\text{impossible}}{\emptyset}$ (claire).

ii) $\Omega = \bigsqcup_{d \in D} (X=d)$?

$X : \Omega \to \mathbb{R}$ application.

$$\Rightarrow \Omega = X^{-1}(X(\Omega))$$
$$= X^{-1}(D)$$
$$= X^{-1}\Big(\bigsqcup_{d\in D} \{d\}\Big)$$
$$= \bigsqcup_{d\in D} X^{-1}(\{d\})$$
$$= \bigsqcup_{d\in D} (X=d) \quad \square$$

---

2) $(P(X=d))_{d\in D}$ est une famille sommable, et on a :

$$\sum_{d\in D} P(X=d) = 1 \quad ?$$

Soit $\sigma : \mathbb{N} \to D$, $k \mapsto \sigma(k)$ une bijection. $\boxed{D = \{\sigma(k) / k\in\mathbb{N}\}}$

On a :

Rappel

$(P(X=d))_{d\in D}$ sommable $\Leftrightarrow$ La série $\sum_{k\geq 0} P(X=\sigma(k))$ CV

Dans ce cas, on a :

$$\sum_{d\in D} P(X=d) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X=\sigma(k))$$

On a $\Omega = \bigsqcup_{d\in D} (X=d)$ (SCE)

$$\Omega = \bigsqcup_{k=0}^{+\infty} (X=\sigma(k))$$

$$\Rightarrow P(\Omega) = P\left(\bigsqcup_{k=0}^{+\infty} (X=\sigma(k))\right)$$

$$\Rightarrow 1 = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X=\sigma(k))$$ (car les $(X=\sigma(k))$ sont 2 à 2 incompatibles)

D'où la série $\sum_{k\geq 0} P(X=\sigma(k))$ converge.

Par suite $\left(P(X=d)\right)_{d\in D}$ est une famille sommable.

Et donc $\sum_{d\in D} P(X=d) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X=\sigma(k)) = 1$ $\square$

---

5) Espérance d'une var discrète

Déf 1

Soit X une var discrète.

Supposons que $D = X(\Omega)$ est dénombrable.

1) On dit que X possède une espérance si et ssi la famille $\left(x P(X=x)\right)_{x\in D}$ est sommable.

2) Dans ce cas, l'espérance de X est définie par :

$$E(X) = \sum_{x\in D} x P(X=x)$$

Prop 2

Soit X une var discrète positive.

On a :

$$\boxed{E(X)=0 \Leftrightarrow (X=0 \text{ presque sûrement})}$$

NB

1) "$X=0$ presque sûrement" veut dire que $P(X=0)=1$.

   Càd que $P(X\neq 0)=0$.

2) On dit aussi que "$X=0$ presque partout".

Démo

Voir TD Probas Partie 2 — Exercice 8

Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une var discrète.

$X(\Omega) = D$ dénombrable.

Soit $\sigma : \mathbb{N} \to D$ une bijection.

$k \longmapsto \sigma(k) = x_k$

1) On sait, via les familles sommables, que :

i) $\left(xP(X=x)\right)_{x\in D}$ sommable $\Leftrightarrow \sum_{k\geq 0} x_k P(X=x_k)$ ACV

ii) Dans ce cas, on a :

$$\sum_{x\in D} xP(X=x) = \sum_{k=0}^{+\infty} x_k P(X=x_k)$$

Ainsi, on a :

X possède une espérance $\Leftrightarrow \left(xP(X=x)\right)_{x\in D}$ sommable

$\Leftrightarrow \sum_{k\geq 0} x_k P(X=x_k)$ ACV

Supp X possède une espérance. On a.

$$E(X) = \sum_{x\in D} xP(X=x)$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} x_k P(X=x_k)$$

Déjà vu en partie 2

6) Propriétés de transfert

Prop 1

Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une var discrète, où $D = X(\Omega)$ dénombrable.
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue ou monotone.

1) $f(X)$ possède une espérance si et ssi $\left(f(x)P(X=x)\right)_{x\in D}$ est une famille sommable.

2) Dans ce cas, on a :

$$E(f(X)) = \sum_{x\in D} f(x)P(X=x)$$

Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une var discrète.
$X(\Omega) = D$ dénombrable.
Soit $\sigma : \mathbb{N} \to D$ une bijection.
$k \mapsto \sigma(k) = x_k$

1) On sait, via les familles sommables, que :

i) $\left(f(x)P(X=x)\right)_{x\in D}$ sommable $\Leftrightarrow \sum_{k\geq 0} f(x_k)\, P(X=x_k)$ ACV

ii) Dans ce cas, on a :

$$\sum_{x\in D} f(x)\, P(X=x) = \sum_{k=0}^{+\infty} f(x_k)\, P(X=x_k)$$

Ainsi, on a :

1) $f(X)$ possède une espérance $\iff \left(f(x)\,P(X=x)\right)_{x\in D}$ sommable

$\iff \sum_{k\geq 0} f(x_k)\,P(X=x_k)$ ACV

2) Supp $f(X)$ possède une espérance. On a :

$$E(f(X)) = \sum_{x\in D} f(x)\,P(X=x)$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} f(x_k)\,P(X=x_k)$$

Déjà vu en partie 2

Prop 2

Soit (X,Y) un couple de var discrètes.
Notons $X(\Omega)=\{x_i \,/\, i\in\mathbb{N}\}$ et $Y(\Omega)=\{y_j \,/\, j\in\mathbb{N}\}$, où les x_i (resp. y_j) sont distincts deux à deux.
Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ continue. On a :

1) La var $f(X,Y)$ possède une espérance si et ssi la famille

$$\left(f(x_i,y_j)\,P(X=x_i, Y=y_j)\right)_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$$ est sommable.

2) Dans ce cas, on a :

$$E(f(X,Y)) = \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} f(x_i,y_j)\,P(X=x_i, Y=y_j)$$

Par exemple

Avec les notations de la prop 2, on a :

1) i) $(X+Y)$ possède une espérance si et ssi $\left((x_i+y_j)P(X=x_i,Y=y_j)\right)_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable.

ii) Dans ce cas, on a :

$$E(X+Y)=\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}(x_i+y_j)P(X=x_i,Y=y_j)$$

2) i) (XY) possède une espérance si et ssi $\left(x_i y_j P(X=x_i,Y=y_j)\right)_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable.

ii) Dans ce cas, on a :

$$E(XY)=\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}x_i y_j P(X=x_i,Y=y_j)$$

Prop 3

Soit (X,Y) un couple de var discrètes.

Si X et Y possèdent une espérance alors $(X+Y)$ la possède aussi, et on a :

$$\boxed{E(X+Y)=E(X)+E(Y)}$$

Démo

Supp que X et Y possèdent une espérance.

Mq que $(X+Y)$ possède aussi une espérance.

Notons $X(\Omega)=\{x_i \,/\, i\in\mathbb{N}\}$ et $Y(\Omega)=\{y_j \,/\, j\in\mathbb{N}\}$.

On a X et Y possèdent une espérance, alors les séries $\sum_{i\geq 0} x_i P(X=x_i)$ et $\sum_{j\geq 0} y_j P(Y=y_j)$ sont ACV.

On a :

$(X+Y)$ possède aussi une espérance $\Longleftrightarrow \Big((x_i+y_j)P(X=x_i, Y=y_j)\Big)_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ sommable

$$\Longleftrightarrow \Big(x_i P(X=x_i, Y=y_j) + y_j P(X=x_i, Y=y_j)\Big)_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} \text{ sommable}$$

Pour m. que $(X+Y)$ possède aussi une espérance, il suffit alors de montrer que les deux familles $\Big(x_i P(X=x_i, Y=y_j)\Big)_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ et $\Big(y_j P(X=x_i, Y=y_j)\Big)_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ sont sommables.

a) $\Big(x_i P(X=x_i, Y=y_j)\Big)_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ sommable ?

$\Big(x_i P(X=x_i, Y=y_j)\Big)_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ sommable $\Longleftrightarrow \Big(|x_i|\, P(X=x_i, Y=y_j)\Big)_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ sommable

a)1) Soit $i\in\mathbb{N}$. On a $\sum_{j\geq 0} |x_i| P(X=x_i, Y=y_j)$ CV ; en effet :

Il suffit de vérifier que $\sum_{j\geq 0} P(X=x_i, Y=y_j)$ CV

Ce qui est vrai car d'après la formule des proba totales :

$$\sum_{j=0}^{+\infty} P(X=x_i, Y=y_j) = P(X=x_i) \quad \square$$

a) 2) La série $\sum_{i\geq 0}\left(\sum_{j=0}^{+\infty}|x_i|P(X=x_i,Y=y_j)\right)$ CV ; en effet :

On a $\sum_{j=0}^{+\infty}|x_i|P(X=x_i,Y=y_j) = |x_i|\underbrace{\sum_{j=0}^{+\infty} P(X=x_i,Y=y_j)}_{=P(X=x_i)\text{ ; Form Prob Totales}}$

$= |x_i|P(X=x_i)$

Alors la série $\sum_{i\geq 0}\left(\sum_{j=0}^{+\infty}|x_i|P(X=x_i,Y=y_j)\right)$ c'est la

série $\sum_{i\geq 0}|x_i|P(X=x_i)$ qui est CV, car X possède une espérance. $\square$

Ainsi, $\left(x_i P(X=x_i,Y=y_j)\right)_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ sommable

---

b) $\left(y_j P(X=x_i,Y=y_j)\right)_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ sommable ?

On procède comme dans a).

Enfin, $(X+Y)$ possède aussi une espérance $\square$

Rappel

i) $(X+Y)$ possède une espérance si et ssi $\left((x_i+y_j)P(X=x_i,Y=y_j)\right)_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable.

ii) Dans ce cas, on a :

$$E(X+Y) = \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}(x_i+y_j)P(X=x_i,Y=y_j)$$

$\rightsquigarrow$ Mq $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$:

On a :

$$E(X+Y) = \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} (x_i + y_j) P(X=x_i, Y=y_j)$$

$$= \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} \left(x_i P(X=x_i, Y=y_j) + y_j P(X=x_i, Y=y_j) \right)$$

$$= \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} x_i P(X=x_i, Y=y_j) + \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} y_j P(X=x_i, Y=y_j)$$

$$= \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\sum_{j=0}^{+\infty} x_i P(X=x_i, Y=y_j) \right) + \sum_{j=0}^{+\infty} \left(\sum_{i=0}^{+\infty} y_j P(X=x_i, Y=y_j) \right)$$

Car les deux familles réelles sont sommables.

$$= \sum_{i=0}^{+\infty} x_i \underbrace{\left(\sum_{j=0}^{+\infty} P(X=x_i, Y=y_j) \right)}_{\substack{= P(X=x_i) \\ \text{D'après la FPT}}} + \sum_{j=0}^{+\infty} y_j \underbrace{\left(\sum_{i=0}^{+\infty} P(X=x_i, Y=y_j) \right)}_{\substack{= P(Y=y_j) \\ \text{D'après la FPT}}}$$

$$= \sum_{i=0}^{+\infty} x_i P(X=x_i) + \sum_{j=0}^{+\infty} y_j P(Y=y_j)$$

$$= E(X) + E(Y)$$

$\square$

Corollaire 4

Soit $n \geq 1$.

Si $X_1, \dots, X_n$ des var discrètes possédant des espérances, alors pour tout $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, la var $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_i$ possède aussi une espérance, et on a :

$$E\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i E(X_i)$$

Prop 5

Si X et Y sont deux var discrètes indépendantes et possédant des espérances, alors leur produit XY possède aussi une espérance, et on a :

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

Démo

Notons $X(\Omega) = \{x_i \,/\, i \in \mathbb{N}\}$ et $Y(\Omega) = \{y_j \,/\, j \in \mathbb{N}\}$. (dénombrables)

On a X et Y possédant une espérance, alors les séries $\sum_{i \geq 0} x_i P(X = x_i)$ et $\sum_{j \geq 0} y_j P(Y = y_j)$ sont ACV.

On a :

XY possède une espérance $\Leftrightarrow \left(x_i y_j P(X = x_i, Y = y_j)\right)_{(i,j) \in \mathbb{N}^2}$ sommable

$$\Longleftrightarrow \left(|x_i y_j| P(X = x_i) P(Y = y_j)\right)_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} \text{ sommable } \left(\text{car } X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes}\right)$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 1) \ \forall i \geq 0, \ \sum_{j \geq 0} |x_i y_j| P(X = x_i) P(Y = y_j) \text{ CV} \\ 2) \ \sum_{i \geq 0} \left(\sum_{j=0}^{+\infty} |x_i y_j| P(X = x_i) P(Y = y_j) \right) \text{ CV} \end{cases}$$

1) Soit $i \geqslant 0$.

Pour que la série $\sum_{j\geqslant 0} |x_i|\cdot|y_j|\ P(X=x_i)P(Y=y_j)$ CV, il suffit que la série $\sum_{j\geqslant 0} |y_j|\ P(Y=y_j)$ CV.

Ce qui est vrai car Y possède une espérance. $\square$

2) $\sum_{i\geqslant 0}\left(\sum_{j=0}^{+\infty} |x_i y_j|\ P(X=x_i)P(Y=y_j)\right)$ CV ?

$$\sum_{i\geqslant 0}\left(\sum_{j=0}^{+\infty} \underbrace{|x_i|\ |y_j|}\ \underbrace{P(X=x_i)P(Y=y_j)}\right) \text{ CV} \iff \sum_{i\geqslant 0} |x_i|\ P(X=x_i)\left(\sum_{j=0}^{+\infty} |y_j|\ P(Y=y_j)\right) \text{ CV}$$

Ce qui est vrai car la série $\sum_{i\geqslant 0} |x_i|\ P(X=x_i)$ CV, puisque X possède une espérance. $\square$

Ainsi, XY possède une espérance $\square$

Rappel

i) (XY) possède une espérance si et ssi $\left(x_i y_j\ P(X=x_i, Y=y_j)\right)_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable.

ii) Dans ce cas, on a :

$$E(XY) = \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} x_i y_j\ P(X=x_i, Y=y_j)$$

On a XY possède une espérance, alors :

$$E(XY) = \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} x_i y_j P(X=x_i, Y=y_j)$$

$$= \sum_{i=0}^{+\infty}\left(\sum_{j=0}^{+\infty} x_i y_j P(X=x_i, Y=y_j)\right)$$ (car la famille réelle est sommable)

$$= \sum_{i=0}^{+\infty}\left(\sum_{j=0}^{+\infty} x_i y_j P(X=x_i) P(Y=y_j)\right)$$ (car X et Y sont indépendantes)

$$= \sum_{i=0}^{+\infty}\left(x_i P(X=x_i) \cdot \underbrace{\sum_{j=0}^{+\infty} y_j P(Y=y_j)}_{=E(Y)}\right)$$

$$= E(Y) \cdot \underbrace{\sum_{i=0}^{+\infty} x_i P(X=x_i)}_{=E(X)}$$

$$= E(X) E(Y)$$

$\square$

Corollaire 6

Soit $n \geqslant 2$.

Si $X_1, \dots, X_n$ des var discrètes indépendantes et possédant des espérances, alors leur produit $(X_1 \cdots X_n)$ possède aussi une espérance, et on a :

$$E\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right) = \prod_{i=1}^{n} E(X_i)$$

Déme

Par récurrence sur $n \geq 2$, via la prop 5 et l'indépendance héritée.
(Détaillez chez-vous)

7) Moments _ Variances

Déf 1 (Rappel)

X var et $k \in \mathbb{N}^*$.
Le moment d'ordre k de X est $E(X^k)$, sous réserve d'existence.

NB

1) X possède un moment d'ordre $k \iff E(X^k)$ existe.
2) X possède un moment d'ordre 1 $\iff E(X)$ existe.
3) X possède un moment d'ordre 2 $\iff E(X^2)$ existe.

Prop 2

X var.
1) Si X possède un moment d'ordre 2, alors X possède une espérance.
2) En général, Si X possède un moment d'ordre k, alors X possède tout moment d'ordre inférieur à k.

Déme

1) Supposons que $E(X^2)$ existe et M qui $E(X)$ existe.

S! On a $|X| \leq \frac{X^2+1}{2}$

Or $E(X^2)$ et $E(1)$ existent alors $\frac{X^2+1}{2}$ possède aussi une espérance.

Par suite $|X|$ possède une espérance.

C à d X possède une espérance. $\square$

2) Voir TD_Partie 3_Exercice 1 $\square$

Corollaire 3

Si X possède un moment d'ordre k, alors il en est de même pour $(X+a)$, pour tout $a \in \mathbb{R}$.

Démo

Supp que $E(X^k)$ existe, et M que $E((X+a)^k)$ existe.

On a $(X+a)^k = \sum_{i=0}^{k} C_k^i a^{k-i} X^i$

(Prop 2) $\Longrightarrow$ ($\forall\, 0 \leq i \leq k$, X^i possède une espérance)

D'où la combinaison linéaire $\left(\sum_{i=0}^{k} C_k^i a^{k-i} X^i\right)$ possède aussi une espérance.

C à d $E((X+a)^k)$ existe. $\square$

Prop et Déf 4

Soit X une var possédant un moment d'ordre 2; (c à d $E(X^2)$ existe)

1) $E((X-E(X))^2)$ existe.

2) La variance de X est :

$$V(X) = E((X-E(X))^2)$$

3) L'écart-type de X est :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

Démo

1) $E\left((X-E(X))^2\right)$ existe.

On a X possède un moment d'ordre 2.

Alors $(X-E(X))$ possède aussi un moment d'ordre 2.

Càd $E\left((X-E(X))^2\right)$ existe.

Prop 5 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

Si X et Y possèdent un moment d'ordre 2, alors on a :

1) XY possède une espérance.

2) $|E(XY)| \leq \sqrt{E(X^2)}\,\sqrt{E(Y^2)}$

Démo

Supp que X et Y possèdent un moment d'ordre 2.

1) M que XY possède une espérance.

Càd que $E(|XY|)$ existe.

On a $|XY| \leq \dfrac{X^2+Y^2}{2}$

Or X^2 et Y^2 possèdent des espérances.

Alors $\dfrac{X^2+Y^2}{2}$ possède une espérance.

D'où $|XY|$ possède une espérance. $\square$

2) $|E(XY)| \leqslant \sqrt{E(X^2)}\sqrt{E(Y^2)}$?

On a $\forall t \in \mathbb{R},\ E\left((tX+Y)^2\right) \geqslant 0$

$\Rightarrow \forall t \in \mathbb{R},\ E\left(t^2X^2 + 2tXY + Y^2\right) \geqslant 0$

$\Rightarrow \boxed{\forall t \in \mathbb{R},\ E(X^2).t^2 + 2E(XY)t + E(Y^2) \geqslant 0}$ (Σ)

Cas 1 : Si $E(X^2) \neq 0$

On aura alors que $\Delta = 4(E(XY))^2 - 4E(X^2)E(Y^2) \leqslant 0$

$\Rightarrow (E(XY))^2 \leqslant E(X^2)E(Y^2)$

$\Rightarrow \boxed{|E(XY)| \leqslant \sqrt{E(X^2)}\sqrt{E(Y^2)}}$ $\square$

Cas 2 : Si $E(X^2) = 0$ $\qquad \forall t \in \mathbb{R},\ at+b \geqslant 0$

(Σ) devient : $\boxed{\forall t \in \mathbb{R},\ 2E(XY)t + E(Y^2) \geqslant 0}$

D'où $E(XY) = 0$

Car sinon, la fonction $t \longmapsto 2E(XY)t + E(Y^2)$ changerait de signe.

Ainsi, l'inégalité $|E(XY)| \leqslant \sqrt{E(X^2)}\sqrt{E(Y^2)}$ est vérifiée. $\square$

$\Delta \leq 0$

$a = 0$ si . . .

Prop et déf 6

Soient X et Y deux var possédant un moment d'ordre 2.

1) La var $(X-E(X))(Y-E(Y))$ possède une espérance.

2) $E\big((X-E(X))(Y-E(Y))\big)$ s'appelle la Covariance de X et Y, et se note $C(X,Y)$.

3) $C(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$

4) $|C(X,Y)| \leq \sigma(X)\,\sigma(Y)$

Démo

Supp que X et Y deux var possédant un moment d'ordre 2.

1) La var $(X-E(X))(Y-E(Y))$ possède une espérance ?

On a X et Y deux var possédant un moment d'ordre 2

$\Rightarrow$ $(X-E(X))$ et $(Y-E(Y))$ possèdent un moment d'ordre 2.

$\Rightarrow$ $(X-E(X))(Y-E(Y))$ possède une espérance $\square$

3) $C(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$? (vue en Partie 2)

$\square$

4) $|C(X,Y)| \leq \sigma(X)\,\sigma(Y)$?

$$|C(X,Y)| = \Big|E\big((X-E(X))\cdot(Y-E(Y))\big)\Big|$$

$$\leq \sqrt{E\left((X-E(X))^2\right)}\ \sqrt{E\left((Y-E(Y))^2\right)}$$ (inégalité de C-Schw)

$$= \sqrt{V(X)} \cdot \sqrt{V(Y)}$$

$$= \sigma(X)\,\sigma(Y)$$

$\square$

Prop et déf 7

Soient X et Y deux var possédant un moment d'ordre 2, telles que $V(X) \neq 0$ et $V(Y) \neq 0$.

1) Le coéfficient de corrélation de X et Y est :

$$\rho(X,Y) = \frac{C(X,Y)}{\sigma(X)\,\sigma(Y)}$$

2) $\rho(X,Y) \in [-1, 1]$.

Démo

2) $\rho(X,Y) \in [-1, 1]$?

On a $|C(X,Y)| \leq \sigma(X)\,\sigma(Y)$

$$\Rightarrow \left| \frac{C(X,Y)}{\sigma(X)\,\sigma(Y)} \right| \leq 1$$

D'où $|\rho(X,Y)| \leq 1$ $\square$

Prop 8

Si X et Y possèdent un moment d'ordre 2 alors :

1) $X+Y$ possède aussi un moment d'ordre 2.

2) $V(X+Y) = V(X) + 2\,C(X,Y) + V(Y)$

Démo

Supp que X et Y possèdent un moment d'ordre 2.

1) M que $X+Y$ possède aussi un moment d'ordre 2.

On a :

$X+Y$ possède aussi un moment d'ordre 2 $\Longleftrightarrow E\left((X+Y)^2\right)$ existe

$$\Longleftrightarrow E\left(X^2+Y^2+2XY\right) \text{ existe}$$

Ce qui est vrai car X^2 et Y^2 possèdent des espérances, vu que X et Y possèdent un moment d'ordre 2, et que (XY) possède une espérance. $\square$

2) $V(X+Y) = V(X) + 2C(X,Y) + V(Y)$?

Déjà prouvée en partie 2. $\square$

Prop 9

Si X et Y possèdent un moment d'ordre 2 et indépendantes, alors

1) $C(X,Y) = 0$

2) $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$

Démo

Vue en partie 2. $\square$

Corollaire 10

Soit $n \geq 1$.

Si $X_1, \dots, X_n$ sont des var indépendantes et possédant un moment d'ordre 2, alors $\sum_{i=1}^{n} X_i$ aussi, et on a :

$$V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i)$$

Démo

Par récurrence sur $n \geq 1$ et via prop 9 et l'indépendance héritée. $\square$

Prop (Variances des var discrètes usuelles)

X	$X = c$ constante	$X \sim \mathcal{U}(n)$	$X \sim \mathcal{B}(p)$	$X \sim \mathcal{B}(n,p)$	$X \sim \mathcal{G}(p)$	$X \sim \mathcal{P}(\lambda)$
$E(X)$	c	$\frac{n+1}{2}$	p	np	$\frac{1}{p}$	λ
$V(X)$	0	$\frac{n^2-1}{12}$	$p(1-p)$	$np(1-p)$	$\frac{1-p}{p^2}$	λ

Démo

Ça reste les cas $X \sim \mathcal{G}(p)$ et $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$.

Les autres sont démontrées en partie 2.

1) Supp que $X \sim \mathcal{G}(p)$.

i) M.q. $E(X) = \frac{1}{p}$

ii) M que $V(X) = \frac{1-p}{p^2}$

2) Supp que $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$

i) M que $E(X) = \lambda$

ii) M que $V(X) = \lambda$

8) Fonction génératrice d'une var discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$

Déf 1

Soit X une var discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$.
La fonction génératrice de X est :

$$\boxed{\begin{array}{rl} G_X : \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ t & \longmapsto G_X(t) = E(t^X) \end{array}}$$

Prop 2

Soit X une var discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$.

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R},\ G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n)\, t^n}$$

Démo

Soit $t \in \mathbb{R}$.
On a $X(\Omega) = \mathbb{N}$, alors :

$$G_X(t) = E(t^X) \qquad = f(X) ;\ \text{où } f(x) = t^x$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} f(n)\, P(X=n) \quad (\text{Formule de transfert})$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} t^n \cdot P(X=n)$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n)\, t^n \qquad \square$$

Prop 3

Soit X une var discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$.

On rappelle que :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n)\, t^n$$

1) Le rayon de convergence de cette série entière est ≥ 1.

2) $G_X(1) = 1$

3) Cette série entière converge normalement sur $[-1, 1]$.

4) G_X est continue sur $[-1, 1]$.

5) G_X est de classe C^∞ sur $]-1, 1[$.

Démo

On a : $\left(\forall t \in \mathbb{R},\ G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n)\, t^n\right)$

1) Le rayon de convergence de cette série entière est ≥ 1, car la suite $(P(X=n))_{n\geq 0}$ est bornée. $\square$

2) $G_X(1) = 1$?

$$G_X(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n)\, 1^n$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n) \quad (\text{car } X(\Omega) = \mathbb{N})$$

$$= 1 \quad \square$$

3) Cette série entière converge normalement sur $[-1,1]$?

Soient $n\in\mathbb{N}$ et $t\in[-1,1]$. On a :

$$|P(X=n)t^n| = P(X=n)|t|^n$$
$$\leq \underbrace{P(X=n)}_{\text{ne dépend pas de } t} \quad (\text{car } |t|\leq 1)$$

Or la série $\sum\limits_{n\geq 0} P(X=n)$ converge (de somme 1)

Alors la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 0} P(X=n)t^n$ CN sur $[-1,1]$. $\square$

4) G_X est continue sur $[-1,1]$?

On a $\begin{cases} \forall n\in\mathbb{N},\ t\mapsto P(X=n)t^n \text{ est continue sur } [-1,1]. \\ \text{La série de fonctions } \sum\limits_{n\geq 0} P(X=n)t^n \text{ CU sur } [-1,1]. \end{cases}$

D'où la fonction somme $G_X : t\mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} P(X=n)t^n$ est continue sur $[-1,1]$. $\square$

5) G_X est de classe C^∞ sur $]-1,1[$?

Notons R le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geq 0} P(X=n)t^n$.

Sa somme, qui est G_X, est alors de classe C^∞ sur $]-R,R[$.

Or $]-1,1[\ \subset\ ]-R,R[$, car $R\geq 1$

D'où G_X est de classe C^∞ sur $]-1,1[$. $\square$

Prop4

Soit X une var discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$.
La connaissance de la loi de X est équivalente à la connaissance de sa fonction génératrice.

Démo

Soit X une var discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$.

1) Supposons connaître la loi de X.
Montrons qu'on connaîtra sa fonction génératrice.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(X=n)$ est alors connue.
D'où $G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n) t^n$ sera aussi connue. $\square$

2) Supposons connaître la fonction génératrice de X.
Montrons qu'on connaîtra sa loi.
On a $\left(\forall t \in]-1,1[,\ G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n) t^n\right)$ et G_X C^∞ sur $]-1,1[$.
Alors : $\left(\forall n \in \mathbb{N},\ P(X=n) = \dfrac{G_X^{(n)}(0)}{n!}\right)$
D'où la connaissance de la loi de X. $\square$

Prop5

Soit X une var discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$, et G_X sa fonction génératrice.

1) i) X possède une espérance $\Longleftrightarrow$ G_X est dérivable en 1

ii) Dans ce cas, $\boxed{G_X'(1) = E(X)}$

2) i) X possède un moment d'ordre 2 ssi G_X est deux fois dérivable en 1.

ii) Dans ce cas, $\boxed{G_X''(1) = E\big(X(X-1)\big)}$

À retenir

1) Il suffit que le RCV $R > 1$ de la SE $\sum_{n \geq 0} P(X=n)t^n$ pour que $E(X)$ et $E(X^2)$ existent (donc $V(X)$ existe).

2) Disposant de G_X, qui est deux fois dérivable en 1, on tire $G_X''(1) = E(X(X-1))$, puis on tire $E(X^2)$ et par suite $V(X)$.

NB

Il faut être capable de déterminer les fonctions génératrices des lois usuelles discrètes, et de retrouver par la suite leurs espérances et variances. (Traiter l'exercice ci-après)

Exercice résolu

1) Déterminer les fonctions génératrices des lois discrètes usuelles. Préciser pour chacune le rayon de convergence, et vérifier qu'il est supérieur strictement à 1.

2) Justifier que $E(X)$ et $V(X)$ existent pour chacune de ces lois usuelles, et retrouver leurs valeurs.

Solution

1) i) Soit $X \sim \mathcal{G}(p)$

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R},\ G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n)\, t^n}$$

On a : $\begin{cases} X(\Omega) = \mathbb{N}^* \\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(X=n) = p(1-p)^{n-1} \end{cases}$

Soit $t \in \mathbb{R}$.

$$G_X(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X=n)\, t^n \qquad (X(\Omega) = \mathbb{N}^*)$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} p(1-p)^{n-1} t^n \qquad (R = ?)$$

D'Alembert $\Longrightarrow$ $\boxed{R = \frac{1}{1-p}}$

et $\boxed{R > 1}$, car $1-p < 1$

$$G_X(t) = \frac{p}{1-p} \sum_{n=1}^{+\infty} \left((1-p)t\right)^n \ ; \ \forall |t| < \frac{1}{1-p} = R$$

$$= \frac{p}{1-p} \cdot \frac{(1-p)t}{1-(1-p)t}$$

$$\boxed{\forall t \in \left]-\frac{1}{1-p}, \frac{1}{1-p}\right[, \ G_X(t) = \frac{pt}{1-(1-p)t}}$$

$\square$

---

ii) Soit $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, \ G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n)\, t^n}$$

On a : $\begin{cases} X(\Omega) = \mathbb{N} \\ \forall n \in \mathbb{N}, \ P(X=n) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} \end{cases}$

Soit $t \in \mathbb{R}$.

$$G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n)\, t^n \qquad (X(\Omega) = \mathbb{N}^*)$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}\, t^n \qquad (R = ?)$$

D'Alembert $\Longrightarrow$ $\boxed{R = +\infty}$

et $\boxed{R > 1}$

$$G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}\, t^n$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!}$$

$$= e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda t}$$

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, \ G_X(t) = e^{\lambda(t-1)}}$$

$\square$

---

iii) Soit $X \sim \mathcal{B}(n,p)$

$$\forall t \in \mathbb{R},\ G_X(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X=k)\, t^k$$

On a : $\begin{cases} X(\Omega) = [\![0,n]\!] \\ \forall k \in [\![0,n]\!],\ P(X=k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \end{cases}$

Soit $t \in \mathbb{R}$.

$$G_X(t) = \sum_{k=0}^{n} P(X=k)\, t^k \qquad (X(\Omega) = [\![0,n]\!])$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k (1-p)^{n-k}\, t^k$$

$\boxed{R = ?}$

Cette série entière converge pour tout $t \in \mathbb{R}$ (car polynomiale)

D'où $\boxed{R = +\infty}$

et on a aussi $\boxed{R > 1}$

Soit $t \in \mathbb{R}$. On a :

$$G_X(t) = \sum_{k=0}^{n} P(X=k)\, t^k$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k (1-p)^{n-k}\, t^k$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k (pt)^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R},\ G_X(t) = \left(pt + (1-p)\right)^n}$$

iv) Soit $X \sim \mathcal{B}(p)$

$$\forall t \in \mathbb{R},\ G_X(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X=k)\, t^k$$

On a : $\begin{cases} X(\Omega) = \{0, 1\} \\ P(X=0) = 1-p \ ; \ P(X=1) = p \end{cases}$

Soit $t \in \mathbb{R}$.

$$G_X(t) = \underbrace{P(X=0)}_{=(1-p)} \cdot t^0 + \underbrace{P(X=1)}_{=p} \cdot t^1 \quad (X(\Omega) = \{0,1\})$$

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R},\ G_X(t) = pt + (1-p)}$$

$\square$

2) Justifier que $E(X)$ et $V(X)$ existent pour chacune de ces lois usuelles, et retrouver leurs valeurs.

D'abord, pour chacune de ces lois usuelles, $R > 1$ et la fonction génératrice de classe C^∞ sur $]-R, R[$, donc elle est dérivable et aussi deux fois dérivable en 1.
Par suite $E(X)$ et $V(X)$ existent.

i) Soit $X \sim \mathcal{B}(n, p)$

$E(X) = ?$

On a $E(X) = G_X'(1)$

$$G_X(t) = (pt + (1-p))^n \Rightarrow G_X'(t) = np(pt + (1-p))^{n-1}$$

$$\Rightarrow G_X'(1) = np$$

D'où $\boxed{E(X) = np}$

$V(X) = ?$

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

$$= E(X^2) - n^2p^2.$$

D'autre part:

$$G_X'(t) = np(pt + (1-p))^{n-1}$$

$$G_X''(1) = E(X(X-1))$$

$$G_X(t) = (pt + (1-p))^n \Rightarrow G_X''(t) = n(n-1)p^2(pt + (1-p))^{n-2}$$

$$\Rightarrow G_X''(1) = n(n-1)p^2$$

D'où $\boxed{E(X(X-1)) = n(n-1)p^2}$

Ainsi:

$$E(X^2) \overset{S}{=} E(X(X-1)) + E(X)$$

$$= n(n-1)p^2 + np$$

D'où

$$V(X) = E(X^2) - n^2p^2$$

$$= n(\cancel{n}-1)p^2 + np - \cancel{n^2}p^2$$

$$= -np^2 + np$$

$\boxed{V(X) = np(1-p)}$ $\square$

Prop 6

Soient $X_1, \dots, X_n$ des var discrètes, à valeurs dans $\mathbb{N}$ et indépendantes.

On a :

$$\boxed{G_{X_1 + \cdots + X_n} = G_{X_1} \cdots G_{X_n}}$$

Démo

Soit $t \in \mathbb{R}$. On a :

$$G_{X_1 + \cdots + X_n}(t) = E\left(t^{X_1 + \cdots + X_n}\right)$$

$$= E\left(t^{X_1} \cdots t^{X_n}\right)$$

Or $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes, alors il en est de même pour les var $t^{X_1}, \dots, t^{X_n}$ par indépendance héritée.

Alors $E\left(t^{X_1} \cdots t^{X_n}\right) = E\left(t^{X_1}\right) \cdots E\left(t^{X_n}\right)$

D'où $\boxed{G_{X_1 + \cdots + X_n}(t) = G_{X_1}(t) \cdots G_{X_n}(t)}$

$\square$

9) Inégalité de Jensen

Prop

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe.

Soit X une var discrète telle X et $f(X)$ possèdent des espérances.

On a :

$$\boxed{f(E(X)) \leqslant E(f(X))}$$

Démo

On fera la démonstration dans le cas où $X(\Omega)$ est fini.

Notons $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$, où les x_i distincts deux à deux.

On a :

$$f(E(X)) = f\left(\sum_{i=1}^{n} P(X=x_i) \cdot x_i\right)$$

Or $\begin{cases} \forall\, 1 \leqslant i \leqslant n,\ P(X=x_i) \geqslant 0 \\ \sum_{i=1}^{n} P(X=x_i) = 1 \\ f \text{ convexe sur } \mathbb{R} \end{cases}$

Alors $f\left(\sum_{i=1}^{n} P(X=x_i) \cdot x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} P(X=x_i) \cdot f(x_i)$

D'où :

$$f(E(X)) \leqslant \sum_{i=1}^{n} P(X=x_i) \cdot f(x_i)$$

$$= E(f(X)) \quad \text{(d'après la formule du transfert)} \qquad \square$$

10) Loi de la somme de deux var discrètes indépendantes

Prop

Soient X et Y deux var discrètes et indépendantes.

Notons $D = X(\Omega)$, $D' = Y(\Omega)$ et $S = X+Y$.

On a :

1) S est aussi une var discrète.

2) L'ensemble des valeurs possibles est

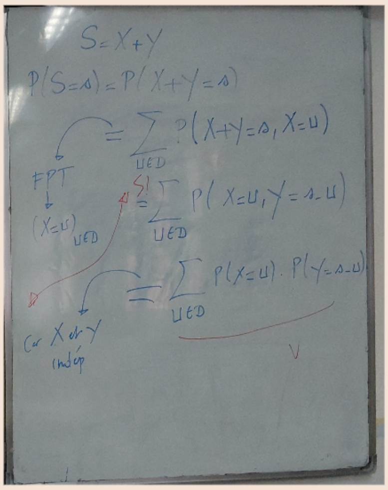
$$\Delta = S(\Omega) = \{u+v \,/\, u \in D \text{ et } v \in D'\}$$

3) La loi de S est donnée par :

$$\boxed{\begin{gathered}\forall s \in \Delta,\ P(S=s) = \sum_{u \in D} P(X=u)\,P(Y=s-u) \\[1em] \forall s \in \Delta,\ P(S=s) = \sum_{v \in D'} P(X=s-v)\,P(Y=v)\end{gathered}}$$

Formules dites de convolution discrètes des lois de X et Y

Démo



11) Modes de convergences

HPF : Hors programme français

a) Convergence en probabilité

Déf

Soit $(X_n)_n$ une suite de var.

Soit X une var.

HPF

On dit que $(X_n)_n$ converge en probabilité vers X si et ssi :

$$\forall \varepsilon > 0, \lim_{n \to +\infty} \left(P(|X_n - X|) \geqslant \varepsilon \right) = 0$$

Prop

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ et soit $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Soit X une var.

HPF

Si $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$

Alors $(f_n(X))_n$ converge en probabilité vers $f(X)$.

b) Convergence en loi

Déf

HPF

Soit $(X_n)_n$ une suite de var.

Soit X une var.

D étant l'ensemble des points de discontinuité de F_X.

On dit que $(X_n)_n$ converge en loi vers X si et ssi :

$$\boxed{\left(F_{X_n}\right)_n \text{ converge simplement vers } F_X \text{ sur } \mathbb{R}\setminus D}$$

Càd :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}\setminus D,\ \lim_{n\to+\infty} P(X_n \leqslant x) = P(X \leqslant x)}$$

Prop

HPF

Supposons que $(X_n)_n$ et X sont à valeurs dans $\mathbb{N}$.

Les propositions suivantes sont équivalentes :

1) $(X_n)_n$ converge en loi vers X

2) $\forall k \in \mathbb{N},\ \lim_{n\to+\infty} P(X_n = k) = P(X = k)$

Exercice classique à savoir résoudre

Soit $\lambda > 0$.

Soit $(p_n)_n$ une suite de réels positifs vérifiant :

$$\lim_{n \to +\infty} n p_n = \lambda$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ X_n \sim B(n, p_n)$$

M que $(X_n)_n$ converge en loi vers une var suivant une loi de Poisson de paramètre λ.

Càd :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \ \lim_{n \to +\infty} P(X_n = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

Solution

Prop

HPF

1) La convergence en probabilité implique la convergence en loi.

2) La réciproque est en général fausse.

12) Loi faible des grands nombres

À savoir !

⚠ Si les var X et Y ont la même loi alors :

$$E(X) = E(Y) \quad \text{et} \quad V(X) = V(Y)$$

Prop (Loi faible des grands nombres)

Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de var indépendantes, de même loi et admettant un moment d'ordre 2.

Notons pour tout $n \geqslant 1$, $S_n = X_1 + \cdots + X_n$

Soit μ l'espérance commune à toutes les var X_n.

On a :

$\left(\dfrac{S_n}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ converge en probabilité vers μ.

Càd :

☆ $$\forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{n\to+\infty} P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mu\right| \geqslant \varepsilon\right) = 0$$

Démo

Mq : $\left(\frac{S_n}{n}\right)_{n\geq 1}$ converge en probabilité vers μ.

Soit alors $\varepsilon > 0$.

Mq : $\lim\limits_{n\to+\infty} P\left(\left|\frac{S_n}{n}-\mu\right| \geq \varepsilon\right) = 0$

Soit $n \geq 1$. On a :

$$E\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n} E\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right)$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} E(X_k)$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mu \quad \left(\text{car } \forall k,\ E(X_k)=\mu\right)$$

$$= \mu$$

Ainsi :

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n}-\mu\right| \geq \varepsilon\right) = P\left(\left|\frac{S_n}{n}-E\left(\frac{S_n}{n}\right)\right| \geq \varepsilon\right)$$

$$\leq \frac{V\left(\frac{S_n}{n}\right)}{\varepsilon^2} \quad (\text{Inég de B-Tch})$$

$$= \frac{1}{n^2}V(S_n)\cdot\frac{1}{\varepsilon^2}$$

$$= \frac{1}{n^2\varepsilon^2}V\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right)$$

$$= \frac{1}{n^2 \varepsilon^2} \sum_{k=1}^{n} V(X_k) \quad \left(\text{car } X_1, \dots, X_n \text{ sont indépendantes}\right)$$

$$= \frac{1}{n^2 \varepsilon^2} \sum_{k=1}^{n} V(X_1) \quad \left(\text{les } X_k \text{ ont la même loi}\right)$$

$$= \frac{n\, V(X_1)}{n^2 \varepsilon^2}$$

D'où $\left(\forall n \geq 1,\ P\left(\left| \frac{S_n}{n} - \mu \right| \geq \varepsilon \right) \leq \frac{V(X_1)}{n\, \varepsilon^2} \right)$

Enfin : $\boxed{\lim_{n \to +\infty} P\left(\left| \frac{S_n}{n} - \mu \right| \geq \varepsilon \right) = 0}$

$\square$

FIN