CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES

MATHEMATIQUES 1

Extrait

EXERCICE II

II.1. Démontrer que la famille $\left(\frac{i+j}{2^{i+j}}\right)_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable et calculer sa somme.

Considérons la partition $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{N}^2$ définie par :

$$I_n = \{(i,j)\in\mathbb{N}^2 \,/\, i+j=n\} \; ; (\forall n \geqslant 0)$$

Rappel :

La famille positive $\left(\frac{i+j}{2^{i+j}}\right)_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable si et ssi :

1) $\forall n\in\mathbb{N}$, la famille $\left(\frac{i+j}{2^{i+j}}\right)_{(i,j)\in I_n}$ est sommable.

2) La série $\sum_{n\geqslant 0}\left(\sum_{(i,j)\in I_n}\frac{i+j}{2^{i+j}}\right)$ Converge.

En cas de sommabilité, on a :

$$\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}\frac{i+j}{2^{i+j}} = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{(i,j)\in I_n}\frac{i+j}{2^{i+j}}\right)$$

Pour : (1) $\forall n \in \mathbb{N}$, la famille $\left(\frac{i+j}{2^{i+j}}\right)_{(i,j)\in I_n}$ est sommable.)

La famille est sommable car finie.

Notons que $I_n = \{(i,j) \in \mathbb{N}^2 / i+j = n\} = \{(i, n-i) / 0 \leq i \leq n\}$

qui est de cardinal $(n+1)$.

Pour : (2) La série $\sum_{n\geq 0}\left(\sum_{(i,j)\in I_n} \frac{i+j}{2^{i+j}}\right)$ converge)

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\sum_{(i,j)\in I_n} \frac{i+j}{2^{i+j}} = \sum_{(i,j)\in I_n} \frac{n}{2^n} \quad \left(\text{car } \forall (i,j) \in I_n, i+j=n\right)$$

$$= \frac{n}{2^n} \cdot \mathrm{card}(I_n)$$

$$= \frac{n(n+1)}{2^n}$$

Ainsi, la série $\sum_{n\geq 0}\left(\sum_{(i,j)\in I_n} \frac{i+j}{2^{i+j}}\right)$ est la série $\sum_{n\geq 0} \frac{n(n+1)}{2^n}$

qui converge d'après le Critère de D'Alembert ; si on note : $u_n = \frac{n(n+1)}{2^n}$, on a $\lim_n \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{2} < 1$.

Enfin : La famille positive $\left(\frac{i+j}{2^{i+j}}\right)_{(i,j)\in \mathbb{N}^2}$ est sommable

Calcul de sa somme :

On a :

$$\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} \frac{i+j}{2^{i+j}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{(i,j)\in I_n} \frac{i+j}{2^{i+j}} \right)$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n(n+1)}{2^n}$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} n(n+1) \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

On pense à la somme d'une série entière.

$$\forall x \in]-1,1[, \quad \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) x^{n-2} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \right)'' \quad (R=1 \text{ le rayon de convergence})$$

$$= \left(\frac{1}{1-x}\right)'' = \boxed{\frac{2}{(1-x)^3}}$$

$$\Rightarrow \forall x \in]-1,1[, \quad \frac{2}{(1-x)^3} = \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1) n \, x^{n-1}$$

Ainsi :

$$\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} \frac{i+j}{2^{i+j}} = \sum_{n=1}^{+\infty} n(n+1) \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} \frac{i+j}{2^{i+j}} = \sum_{n=1}^{+\infty} n(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$= \frac{1}{2}\cdot \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1)n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot \frac{2}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^3}$$

Car $\begin{cases} \forall x \in]-1,1[,\ \dfrac{2}{(1-x)^3} = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (n+1)n\, x^{n-1} \\ \text{et } \dfrac{1}{2} \in]-1,1[\end{cases}$

Enfin : $\boxed{\displaystyle\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} \frac{i+j}{2^{i+j}} = 8}$

Fin