X-ENS MP 2022
Corrigé de Mathématiques B

m.laamoum@gmail.com

Première partie : Développement Eulérien de cotan et calcul de $\zeta(2n)$, $n \in \mathbb{N}$.

1.a) Pour $x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Z}$ posons

$$u_n(x) = \frac{1}{x+n} + \frac{1}{x-n}$$

On a

$$u_n(x) = \frac{2x}{x^2-n^2} \sim \frac{-2x}{n^2}$$

ainsi la série $\sum u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Z}$.

1.b) Comme $g(x) = \frac{1}{x} + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{x^2-n^2}$ alors g est impaire.

De plus f est impaire donc D l'est aussi.

1.c) Soit $N \geq 1$, on a

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{x+1+n} + \frac{1}{x+1-n} \right) &= \sum_{n=2}^{N+1} \frac{1}{x+n} + \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{x-n} + \frac{1}{x} \\ &= \frac{1}{x+N+1} - \frac{1}{x-N} + \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{x+n} + \frac{1}{x-n} + \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} \end{aligned}$$

par passage à la limite sur N on obtient $g(x+1) = g(x)$.

f est 1 périodique donc D l'est aussi .

1.d) Soit $N \in \mathbb{N}$, pour $x \in]N, N+1[$ écrivons

$$g(x) = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{x+n} + \frac{1}{x-n} \right) + \sum_{n=N+1}^{+\infty} \left(\frac{1}{x+n} + \frac{1}{x-n} \right)$$

Si $n > N$, nous avons

$$\left| \frac{1}{x^2-n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2-N^2}$$

donc la série $\sum\limits_{n>N} \dfrac{1}{x^2-n^2}$ converge normalement et uniformément sur $]N, N+1[$. Ainsi g est continue sur $]N, N+1[$ donc elle est sur $\mathbb{R}^+ \backslash \mathbb{N}$, par parité g est continue sur $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Z}$.

f est continue sur $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Z}$ donc D l'est aussi.

2.a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Z}$, on a

$$f\left(\frac{1+x}{2}\right) = \pi \operatorname{cotan}(\frac{\pi x}{2} + \frac{\pi}{2}) = \frac{-\pi}{\operatorname{cotan}(\frac{\pi x}{2})}.$$

donc

$$\begin{aligned} f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{1+x}{2}\right) &= \frac{-\pi}{\operatorname{cotan}(\frac{\pi x}{2})} + \pi \operatorname{cotan}(\frac{\pi x}{2}). \\ &= \pi \frac{\cos^2(\frac{\pi x}{2}) - \sin^2(\frac{\pi x}{2})}{\sin(\frac{\pi x}{2}) \cos(\frac{\pi x}{2})} \\ &= 2f(x) \end{aligned}$$

2.b) On a

$$g(\frac{x}{2}) = \frac{2}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2}{x+2n} + \frac{2}{x-2n} \right) \quad \text{et} \quad g(\frac{x+1}{2}) = \frac{2}{x+1} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2}{x+2n+1} + \frac{2}{x-2n+1} \right)$$

cette dernière série s'écrit

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{2}{x-2n+1}+\frac{2}{x+2n-1}\right)+\underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{2}{x+2n+1}-\frac{2}{x+2n-1}\right)}_{\text{somme télescopique}}$$

qui vaut

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{2}{x+2n-1}+\frac{2}{x-(2n-1)}\right)-\frac{2}{x+1}$$

ainsi

$$\begin{aligned} g(\frac{x}{2})+g(\frac{x+1}{2}) &= \frac{2}{x}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{2}{x+2n}+\frac{2}{x-2n}\right)+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{2}{x+2n-1}+\frac{2}{x-2n+1}\right) \\ &= 2g(x) \end{aligned}$$

3.a) Soit $N\in\mathbb{Z}^*$, écrivons

$$D(x)=\pi\operatorname{cotan}(\pi x)-\frac{1}{x+N}-\frac{1}{x-N}-\frac{1}{x}-\sum_{\substack{n=1\\ n\neq N}}^{+\infty}\left(\frac{1}{x+n}+\frac{1}{x-n}\right).$$

on a au voisinage de N

$$\operatorname{cotan}(\pi x)=\frac{1}{\pi(x-N)}+\frac{\pi}{3}(x-N)+o(x-N)$$

donc $\operatorname{cotan}(\pi x)-\dfrac{1}{\pi(x-N)}\underset{x\to N}{\to}0$, de plus $x\to\sum\limits_{n=N+1}^{+\infty}\left(\frac{1}{x+n}+\frac{1}{x-n}\right)$ est continue sur $]N-1,N+1[$ (question **1.d**) ainsi D se prolonge par continuité en N, et elle se prolonge une fonction $\widetilde{D}$ continue sur $\mathbb{R}$.
On a $\operatorname{cotan}(\pi x)-\frac{1}{\pi x}\underset{x\to 0}{\to}0$ et $x\to\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{x+n}+\frac{1}{x-n}\right)$ est continue sur $]-1,1[$ et vaut 0 pour $x=0$, ainsi $\widetilde{D}(0)=0$.

3.b) $\widetilde{D}$ est continue sur le compact $[0,1]$ donc elle est bornée et atteint ses bornes , ce qui justifie l'existence de $\alpha\in[0,1]$ tel que $\widetilde{D}(\alpha)=M=\sup\limits_{t\in[0,1]}\widetilde{D}(t)$.
D'après **2.a)** et **b)** on a $D(\frac{x}{2})+D(\frac{x+1}{2})=2D(x)$ par suite $\widetilde{D}(\frac{x}{2})+\widetilde{D}(\frac{x+1}{2})=2\widetilde{D}(x)$ pour tout x dans $\mathbb{R}$.
Donc

$$\widetilde{D}(\frac{\alpha}{2})+\widetilde{D}(\frac{\alpha+1}{2})=2\widetilde{D}(\alpha)=2M$$

On a $\widetilde{D}(\frac{\alpha}{2})\leq M$ et $\widetilde{D}(\frac{\alpha+1}{2})\leq M$, si $\widetilde{D}(\frac{\alpha}{2})<M$ ou $\widetilde{D}(\frac{\alpha+1}{2})<M$ alors $\widetilde{D}(\frac{\alpha}{2})+\widetilde{D}(\frac{\alpha+1}{2})<2M$ ce qui est absurde donc $\widetilde{D}(\frac{\alpha}{2})=\widetilde{D}(\frac{\alpha+1}{2})=M$, par récurrence on trouve

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad \widetilde{D}\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)=M$$

4. $\widetilde{D}$ est continue en 0 donc

$$M=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)=0$$

De même on a $\exists\beta\in[0,1]$ tel que $\widetilde{D}(\alpha)=m=\inf\limits_{t\in[0,1]}\widetilde{D}(t)$ et $\widetilde{D}\left(\frac{\beta}{2^n}\right)=m\ \ \forall n\in\mathbb{N}$; ainsi $m=M=0$, par suite $\widetilde{D}$ est nulle sur $[0,1]$, or $\widetilde{D}$ est 1 periodique donc elle est nulle sur $\mathbb{R}$, ainsi $f=g$ et :

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z},\quad \pi x\operatorname{cotan}(\pi x)=1+2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^2}{x^2-n^2}}$$

5.a) On écrit la formule précédente pour $t\in\,]-1,1[\backslash\{0\}$ et on fait le changement $x=2\pi t$ on obtient pour $x\in\,]-2\pi,2\pi[\backslash\{0\}$

$$\frac{x}{2}\operatorname{cotan}\left(\frac{x}{2}\right)=1+2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^2}{x^2-(2\pi n)^2}$$

pour tout $n \geq 1$ et tout $x \in \left]-2\pi, 2\pi\right[\setminus \{0\}$ on a

$$\begin{aligned}
\frac{x^2}{x^2-(2\pi n)^2} &= \frac{-x^2}{(2\pi n)^2}\frac{1}{1-(\frac{x}{2\pi n})^2} \\
&= -\sum_{k=1}^{+\infty}(\frac{x}{2\pi n})^{2k} \qquad (\left|\tfrac{x}{2\pi n}\right| < 1)
\end{aligned}$$

La famille $\left((\frac{x}{2\pi n})^{2k}\right)_{k\geq 1, n\geq 1}$ est évidement sommable , donc

$$\begin{aligned}
\frac{x}{2}\,\mathrm{cotan}\left(\frac{x}{2}\right) &= 1-2\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{+\infty}(\frac{x}{2\pi n})^{2k} \\
&= 1-2\sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}(\frac{x}{2\pi n})^{2k}
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\boxed{\forall x \in \left]-2\pi, 2\pi\right[\setminus \{0\},\ \tfrac{x}{2}\,\mathrm{cotan}\left(\tfrac{x}{2}\right) = 1-\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\zeta(2k)}{2^{2k-1}\pi^{2k}}x^{2k}}$$

5.b) La formule d'Euler donne pour $x \in \left]-2\pi, 2\pi\right[\setminus \{0\}$:

$$\mathrm{cotan}\left(\frac{x}{2}\right) = i\frac{e^{ix}+1}{e^{ix}-1} = i - \frac{2i}{e^{ix}-1}$$

d'où

$$\frac{ix}{e^{ix}-1} = 1-\frac{ix}{2}-\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\zeta(2k)}{2^{2k-1}\pi^{2k}}x^{2k} \qquad (1)$$

6. Ėcrivons (1) sous la forme

$$\forall x \in \left]-2\pi, 2\pi\right[\setminus \{0\}, \quad \frac{ix}{e^{ix}-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.(ix)^n$$

la série $\sum u_n z^n$ est de rayon de convergence $R \geq 2\pi$, et on a , par produit de Cauchy, pour tout $|z| < 2\pi$,

$$(e^z-1)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}u_n z^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} w_n z^n \qquad (2)$$

et pour $x \in \left]-2\pi, 2\pi\right[$ la relation (1) donne ,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n i^n x^n = ix$$

par unicité des coefficients du DSE on a :

$$w_1 = 1 \text{ et } w_n = 0\ \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$$

ce qui donne pour tout $|z| < 2\pi$,

$$(e^z-1)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}u_n z^n\right) = z$$

7.a) D'après la question précédente :

$$\forall x \in \left]-2\pi, 2\pi\right[, \quad h(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$$

h est DSE en 0 de rayon $R \geq 2\pi$, donc elle est de classe C^∞ sur $\left]-2\pi, 2\pi\right[$, et elle est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}\setminus\left]-2\pi, 2\pi\right[$,comme produit de fonctions de classe C^∞, donc h est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, de plus on a

$$n!u_n = h^{(n)}(0)$$

ce qui donne

$$\boxed{h^{(2n)}(0) = \frac{(-1)^{n-1}(2n)!}{\pi^{2n}2^{2n-1}}\zeta(2n) \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*}$$

7.b) Reprenons la formule (2) de la question 6) , por tout $|z| < 2\pi$

$$z = (e^z - 1)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n z^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} w_n z^n$$

on a $b_n = h^{(n)}(0) = n!u_n$. Posons $e^z - 1 = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ avec $a_0 = 0$ et $a_n = \frac{1}{n!}$, ce qui donne

$$w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k a_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{b_k}{k!} a_{n-k}$$

donc pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{b_k}{k!(n+1-k)!} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } n \geqslant 1. \end{cases}$$

Les b_n sont appelés les nombres de Bernoulli .

7.c) On a

$$\boxed{\zeta(2n) = b_{2n}\frac{(-1)^{n-1}\pi^{2n}2^{2n-1}}{(2n)!} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*}$$

Si $n = 2$ alors $\frac{b_0}{6} + \frac{b_1}{2} + \frac{b_2}{2} = 0$ et $b_2 = \dfrac{1}{6}$.

Donc $\boxed{\zeta(2) = \dfrac{\pi^2}{6}}$.

De même on a : $b_4 = \dfrac{-1}{30}$, $\boxed{\zeta(4) = \dfrac{\pi^4}{90}}$ et $b_6 = \dfrac{1}{42}$, $\boxed{\zeta(6) = \dfrac{\pi^6}{945}}$.

Deuxième partie

8.a) Soit $\mu \in \mathcal{M}(E)$, μ est une probabilité sur E pour la tribu $\mathcal{P}(E)$, donc $\mu(\mathcal{P}(E)) \subset [0,1]$ et $\mathcal{M}(E)$ est une partie de $\mathcal{B}\ (\mathcal{P}(E)\ ,\mathbb{R})$.

8.b) Soit $f, g \in \mathcal{B}\ (\mathcal{P}(E)\ ,\mathbb{R})$, $\|f\| = \sup\{|f(A)|, \quad A \in \mathcal{P}(E)\ \}$.

- $\|f\| \geq 0$.
- Si $\|f\| = 0$, pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$ on a $0 \leq |f(A)| \leq \|f\|$, donc $f(A) = 0$, ains $f = 0$.
- Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$ on a $|\lambda f(A)| \leq |\lambda|\,\|f\|$ donc $\|\lambda f\| \leq |\lambda|\,\|f\|$ (*).
  Si $\lambda \neq 0$, on a $\|f\| = \|\frac{1}{\lambda}(\lambda f)\|$, l'inégalité (*) donne $\|f\| = \left|\frac{1}{\lambda}\right| \|\lambda f\|$, d'où $|\lambda|\,\|f\| \leq \|\lambda f\|$, c'est aussi valable pour $\lambda = 0$, aissi $\|\lambda f\| = |\lambda|\,\|f\|$.
- Pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$ $|f(A) + g(A)| \leq |f(A)| + |g(A)| \leq \|f\| + \|g\|$, ce qui donne$\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$.
  Ainsi $\|.\|$ est une norme sur $\mathcal{B}\ (\mathcal{P}(E)\ ,\mathbb{R})$.

9. Soient $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{M}(E)$ qui converge vers μ dans $\mathcal{B}\ (\mathcal{P}(E)\ ,\ \mathbb{R})$.
Soit $x \in E$, on a

$$|\mu_n(x) - \mu(x)| \leq \|\mu_n - \mu\| \underset{n\to+\infty}{\rightarrow} 0$$

Ainsi $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \mu_n(x) = \mu(x)}$.

10.a) Posons pour tout $n \geq 1$, $A_n = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite croissante de réunion E , le théorème de la limite monotone donne

$$\lim_{n\to+\infty} \mu(A_n) = 1$$

la suite $(\mu(A_n))$ est croissante donc il existe $N \geq 1$ tel que , pour tout $n \geq N$, $\mu(A_n) \geq 1-\varepsilon$.
Soit $k \geq N$, on a $\forall x \in A_k$, $\mu_n(x) \underset{n\to+\infty}{\to} \mu(x)$ donc

$$\exists N_x \geq 1 \ , \ n \geq N_x \ \Rightarrow \ |\mu_n(x)-\mu(x)| < \frac{\varepsilon}{\mathrm{Card}(A_k)}$$

aissi

$$n \geq \max_{x\in A_k} N_x \ \Rightarrow \sum_{x\in A_k} |\mu_n(x)-\mu(x)| < \varepsilon.$$

On prend $F_\varepsilon = A_k$ et $N_\varepsilon = \max\limits_{x\in A_k} N_x$, on a $\mu(F_\varepsilon) > 1-\varepsilon$ et pour tout entier $n \geqslant N_\varepsilon$ on a

$$\sum_{x\in F_\varepsilon} |\mu_n(x)-\mu(x)| < \varepsilon$$

10.b) Soit A une partie de E , on a

$$\begin{aligned}
|\mu_n(A)-\mu(A)| &= |\mu_n(A\cap F_\varepsilon)+\mu_n(A\cap(E\backslash F_\varepsilon))-\mu(A\cap F_\varepsilon)-\mu(A\cap(E\backslash F_\varepsilon))| \\
&\leqslant |\mu_n(A\cap F_\varepsilon)-\mu(A\cap F_\varepsilon)|+\mu_n(A\cap(E\backslash F_\varepsilon))+\mu(A\cap(E\backslash F_\varepsilon)) \\
&\leq \underbrace{|\mu_n(A\cap F_\varepsilon)-\mu(A\cap F_\varepsilon)|}_{(1)}+\underbrace{\mu(E\backslash F_\varepsilon)+\mu_n(E\backslash F_\varepsilon)}_{(2)} \quad (\text{ car } A\cap(E\backslash F_\varepsilon)\subset E\backslash F_\varepsilon \ )
\end{aligned}$$

On a pour $n \geqslant N_\varepsilon$

$$\begin{aligned}
(1) \qquad |\mu_n(A\cap F_\varepsilon)-\mu(A\cap F_\varepsilon)| &= \left|\sum_{x\in A\cap F_\varepsilon}\mu_n(x)-\sum_{x\in A\cap F_\varepsilon}\mu(x)\right| \\
&\leq \sum_{x\in A\cap F_\varepsilon}|\mu_n(x)-\mu(x)| \\
&\leq \sum_{x\in F_\varepsilon}|\mu_n(x)-\mu(x)| \\
&\leq \varepsilon
\end{aligned}$$

De plus

$$(2) \qquad \mu(E\backslash F_\varepsilon)+\mu_n(E\backslash F_\varepsilon) \leq 2\mu(E\backslash F_\varepsilon)+|\mu_n(E\backslash F_\varepsilon)-\mu(E\backslash F_\varepsilon)|$$

et

$$\begin{aligned}
|\mu_n(E\backslash F_\varepsilon)-\mu(E\backslash F_\varepsilon)| &= |\mu_n(F_\varepsilon)-\mu(F_\varepsilon)| \\
&\leq \sum_{x\in F_\varepsilon}|\mu_n(x)-\mu(x)| \\
&\leq \varepsilon
\end{aligned}$$

Comme $\mu(F_\varepsilon) > 1-\varepsilon$ alors $\mu(E\backslash F_\varepsilon) \leq \varepsilon$ et

$$(2) \qquad \mu(E\backslash F_\varepsilon)+\mu_n(E\backslash F_\varepsilon) \leq 3\varepsilon$$

Ainsi pour tout $n \geqslant N_\varepsilon$, $|\mu_n(A)-\mu(A)| < 4\varepsilon$
10.c) Conséquence des questions **9)** , **10.a)** et **10.b)** .
11. Si $(\delta_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge vers une probabilité δ dans $\mathcal{B}(\mathcal{P}(E),\mathbb{R})$, alors pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $(\delta_k(\{x_n\}))_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\delta(\{x_n\})$. On a $\delta_k(\{x_n\})=0$ pour tout $k>n$, donc $\delta(\{x_n\})=0$, ainsi $\delta=0$ ce qui est absurde car $\delta(E)=1$. Donc $(\delta_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ ne converge pas dans $\mathcal{B}(\mathcal{P}(E),\mathbb{R})$.
12.a) On utilise le théorème de Bolzano-Weierstrass et une récurrence :

- La suite $(\mu_n(x_1))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $\mathbb{R}$, donc on peut en extraire une sous suite convergente $\left(\mu_{\varphi_1(n)}(x_1)\right)_{n\in\mathbb{N}}$, la suite $\left(\mu_{\varphi_1(n)}(x_2)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est aussi bornée dans $\mathbb{R}$, donc on peut en extraire une sous suite $\left(\mu_{\varphi_1\circ\varphi_2(n)}(x_2)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente , de plus $\left(\mu_{\varphi_1\circ\varphi_2(n)}(x_1)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la même limite que la suite $\left(\mu_{\varphi_1(n)}(x_1)\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

- Soit $m \geq 2$, supposons qu'on a construit $(\varphi_k)_{1\leq k\leq m}$ des applications strictement croissantes de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}^*$ telles que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et pour tout entier $1 \leqslant i \leqslant m$, la suite $\left(\mu_{\varphi_1\circ\varphi_2\circ\ldots\circ\varphi_m(n)}\left(x_i\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.
  La suite $\left(\mu_{\varphi_1\circ\varphi_2\circ\ldots\ldots\varphi_m(n)}\left(x_{m+1}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée dans $\mathbb{R}$, donc on peut en extraire une sous suite convergente $\left(\mu_{\varphi_1\circ\varphi_2\circ\ldots\circ\varphi_m\circ\varphi_{m+1}(n)}\left(x_{m+1}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$, de plus les suites $\left(\mu_{\varphi_1\circ\varphi_2\circ\ldots\circ\varphi_m\circ\varphi_{m+1}(n)}\left(x_i\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent pour tout $1 \leqslant i \leqslant m$.
  D'où le résultat .

12.b) Soit $i \in \mathbb{N}^*$ et $h > k \geq i$, la suite $\left(\mu_{\varphi_1\circ\varphi_2\circ\ldots\circ\varphi_h(n)}\left(x_i\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une sous suite de $\left(\mu_{\varphi_1\circ\varphi_2\circ\ldots\circ\varphi_k(n)}\left(x_i\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$, elles sont convergentes, donc elles ont la même limite , ainsi cette limite commune ne dépend que de i et pas de k , elle est notée $\mu_\infty\left(x_i\right)$.

12.c) Pour $k \in \mathbb{N}^*$ l'application φ_k est strictement croissante et $\varphi_k(n) \geq n \ \ \forall n$, donc $\varphi_{k+1}(k+1) > k$ et

$$\varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \ldots \circ \varphi_{k+1}(k+1) > \varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \ldots \circ \varphi_k(k)$$

ainsi ψ est strictement croissante.
On a pour tout $i \in \mathbb{N}^*$ et $k \geq i$ la suite $\left(\mu_{\varphi_1\circ\varphi_2\circ\ldots\circ\varphi_k(n)}\left(x_i\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\mu_\infty\left(x_i\right)$,donc

$$\forall\varepsilon > 0 \ \exists N_\varepsilon \ \ , n \geq N \Rightarrow \left|\mu_{\varphi_1\circ\varphi_2\circ\ldots\circ\varphi_k(n)}\left(x_i\right) - \mu_\infty\left(x_i\right)\right| < \varepsilon \ , \forall k \geq i \ ,$$

ce qui donne

$$\forall\varepsilon > 0 \ \exists N_\varepsilon \ \ , n \geq N \Rightarrow \sup_{k\geq i}\left|\mu_{\varphi_1\circ\varphi_2\circ\ldots\circ\varphi_k(n)}\left(x_i\right) - \mu_\infty\left(x_i\right)\right| < \varepsilon \ ,$$

ou encore

$$\sup_{k\geq i}\left|\mu_{\varphi_1\circ\varphi_2\circ\ldots\circ\varphi_k(n)}\left(x_i\right) - \mu_\infty\left(x_i\right)\right| \underset{n\to+\infty}{\to} 0$$

c'est une convergence uniforme pour $k \geq i$.
Pour n assez grand on a

$$\left|\mu_{\psi(n)}\left(x_i\right) - \mu_\infty\left(x_i\right)\right| \leq \sup_{k\geq i}\left|\mu_{\varphi_1\circ\varphi_2\circ\ldots\circ\varphi_k(n)}\left(x_i\right) - \mu_\infty\left(x_i\right)\right|$$

donc $\boxed{\left(\mu_{\psi(k)}\left(x_i\right)\right)_{k\in\mathbb{N}^*} \underset{n\to+\infty}{\to} \mu_\infty\left(x_i\right).}$

12.d) Soit $i \in \mathbb{N}^*$, $\left(\mu_{\psi(k)}\left(x_i\right)\right)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est une suite d'éléments de $[0,1]$, qui est fermé , donc $\mu_\infty\left(x_i\right) \in [0,1]$.
Pour tout k et n dans $\mathbb{N}^*$ on a

$$\sum_{i=1}^{n}\mu_{\psi(k)}\left(x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty}\mu_{\psi(k)}\left(x_i\right) = 1$$

par passage à la limite sur k on obtient

$$\sum_{i=1}^{n}\mu_\infty\left(x_i\right) \leq 1$$

comme $\mu_\infty\left(x_i\right) \geq 0$ alors la série $\sum\limits_{i\geq 1}\mu_\infty\left(x_i\right)$ converge et $\boxed{\sum\limits_{i=1}^{+\infty}\mu_\infty\left(x_i\right) \leq 1}$.

12.e) Soit $\varepsilon > 0$ et F_ε partie finie de E telle que

$$1 - \varepsilon \leq \mu_n\left(F_\varepsilon\right) = \sum_{x\in F_\varepsilon}\mu_n(x) \quad \forall n \geq 1$$

par passage à la limite sur n on obtient $1 - \varepsilon \leq \sum\limits_{x\in F_\varepsilon}\mu_\infty(x)$, par suite

$$1 - \varepsilon \leq \sum_{i=1}^{+\infty}\mu_\infty\left(x_i\right) \leq 1$$

ceci etant pour tout $\varepsilon > 0$ donc $\boxed{\sum\limits_{i=1}^{+\infty}\mu_\infty\left(x_i\right) = 1}$.
Ainsi la famille $\left(\mu_\infty\left(x_i\right)\right)_{i\in\mathbb{N}^*}$ définie une une unique probabilité, μ_∞ , par si $A \subset E$ alors $\mu_\infty(A) = \sum\limits_{x\in A}\mu_\infty(x)$.
Nous avons $\left(\mu_{\psi(k)}\left(x_i\right)\right)_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\mu_\infty\left(x_i\right)$ pour tout i dans $\mathbb{N}^*$, d'après la question **10)** $\left(\mu_{\psi(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge

vers μ_∞ dans $\mathcal{B}(\mathcal{P}(E),\mathbb{R})$, ainsi μ_∞ est une valeur d'adhérence de $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Troisième partie

13 On a

$$\mu_X(X(\Omega)) = \mathbb{P}(X \in X(\Omega)) = 1.$$

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements deux à deux incompatibles de $X(\Omega)$. Les événements $([X \in A_n])_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux à deux disjoints et

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} [X \in A_n] = \left[X \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right]$$

on en déduit

$$\begin{aligned}
\mu_X\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) &= \mathbb{P}\left(X \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} [X \in A_n]\right) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X \in A_n) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \mu_X(A_n)
\end{aligned}$$

Ainsi μ_X est une probabilité sur E.

14 Soit X et Y deux v.a.r sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et A une partie de E :

$$\begin{aligned}
|\mu_X(A) - \mu_Y(A)| &= |\mathbb{P}(\{X \in A\}) - \mathbb{P}(\{Y \in A\})| \\
&= \left|\mathbb{P}(\mathbb{1}_{\{X\in A\}} = 1) - \mathbb{P}(\mathbb{1}_{\{Y\in A\}} = 1)\right| \\
&= \left|\mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{X\in A\}}) - \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{Y\in A\}})\right| \qquad (\mathbb{1}_{\{X\in A\}}(\Omega) = \{0,1\}) \\
&= \left|\mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{X\in A\}} - \mathbb{1}_{\{Y\in A\}})\right| \\
&\leqslant \mathbb{E}\left(\left|\mathbb{1}_{\{X\in A\}} - \mathbb{1}_{\{Y\in A\}}\right|\right)
\end{aligned}$$

$\left|\mathbb{1}_{\{X\in A\}} - \mathbb{1}_{\{Y\in A\}}\right|$ prend les valeurs 0 ou 1, avec $\left[\left|\mathbb{1}_{\{X\in A\}} - \mathbb{1}_{\{Y\in A\}}\right| = 1\right] = [X \neq Y]$ et $\left[\left|\mathbb{1}_{\{X\in A\}} - \mathbb{1}_{\{Y\in A\}}\right| = 0\right] = [X = Y]$ donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\left|\mathbb{1}_{\{X\in A\}} - \mathbb{1}_{\{Y\in A\}}\right|\right) &= \mathbb{P}(\left|\mathbb{1}_{\{X\in A\}} - \mathbb{1}_{\{Y\in A\}}\right| = 1) \\
&= \mathbb{P}(X \neq Y)
\end{aligned}$$

Ainsi

$$|\mu_X(A) - \mu_Y(A)| \leq \mathbb{P}(X \neq Y) \quad \forall A \in \mathcal{P}(E)$$

donc $\mu_X - \mu_Y$ est bornée et $\boxed{\|\mu_X - \mu_Y\| \leqslant \mathbb{P}(X \neq Y)}$.

15.a) Soit $\omega \in \Omega$, on a $(X_n(\omega))_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire et converge vers $X(\omega)$, donc $\{n \in \mathbb{N},\ X_n(\omega) \neq X(\omega)\}$ est fini et $\max\{n \in \mathbb{N},\ X_n(\omega) \neq X(\omega)\}$ existe , d'où L est bien définie.

15.b) Soit $n \in \mathbb{N}$, on a

$$[L \geqslant n] = \{\omega \in \Omega,\ X_k(\omega) \neq X(\omega) \ \ \forall k \leq n\}$$

donc $[X_n \neq X] \subset [L \geqslant n]$ par suite $\boxed{\mathbb{P}(X_n \neq X) \leqslant \mathbb{P}(L \geqslant n)}$.

15.c) D'après la question **14)** on a $\|\mu_{X_n} - \mu_X\| \leqslant \mathbb{P}(X_n \neq X)$ donc $\boxed{\|\mu_{X_n} - \mu_X\| \leqslant \mathbb{P}(L \geqslant n)}$.
Remarquons que $\bigcup\limits_{n\geq 1} [L < n] = \Omega$ et $([L < n])_{n\geq 1}$ est une suite croissante d'événements , le théorème de la limite monotone donne $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(L < n) = 1$, par suite $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(L \geq n) = 0$ ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} \|\mu_{X_n} - \mu_X\| = 0$, c.a.d $\mu_{X_n} \underset{n\to+\infty}{\to} \mu_X$.

16. Soit $\omega \in \Omega$, la suite $(\psi_n(X(\omega)))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est stationnaire , car $\nu_{p_i}(X(\omega))$ est nulle à partir d'un certain rang, donc $\psi_n(X(\omega)) \underset{n\to+\infty}{\to} X(\omega)$, de la question **15)** *(appliquée à la suite* $(\psi_n(X))_{n\in\mathbb{N}^*}$*)* on a $\mu_{\psi_n(X)} \underset{n\to+\infty}{\to} \mu_X$, ce qui se traduit par

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(X = x) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\psi_n(X) = x\right)}$$

Quatrième partie

17. Soient μ_1 et μ_2 deux probabilités sur $\mathbb{N}^*$. On suppose que $\forall r \in \mathbb{N}^*, \mu_1\left(\mathbb{N}^* r\right) = \mu_2\left(\mathbb{N}^* r\right)$.

17.a) Soit $r \in \mathbb{N}^*$ et $n \geqslant 1$, on a

$$\bigcup_{i=1}^{n+1} \mathbb{N}^* r p_i = \left(\bigcup_{i=1}^{n} \mathbb{N}^* r p_i\right) \cup \mathbb{N}^* r p_{n+1}$$

et

$$\mathbb{N}^* r p_{n+1} = \left(\bigcup_{i=1}^{n} \mathbb{N}^* r p_{n+1} p_i\right) \cup \left(\mathbb{N}^* r p_{n+1} \backslash \bigcup_{i=1}^{n} \mathbb{N}^* r p_{n+1} p_i\right)$$

puisque

$$\bigcup_{i=1}^{n} \mathbb{N}^* r p_{n+1} p_i \subset \bigcup_{i=1}^{n} \mathbb{N}^* r p_i$$

alors

$$\bigcup_{i=1}^{n+1} \mathbb{N}^* r p_i = \left(\bigcup_{i=1}^{n} \mathbb{N}^* r p_i\right) \cup \left(\mathbb{N}^* r p_{n+1} \backslash \bigcup_{i=1}^{n} \mathbb{N}^* r p_{n+1} p_i\right) \qquad (*)$$

17.b) On suppose que $\forall r \in \mathbb{N}^*, \mu_1\left(\mathbb{N}^* r\right) = \mu_2\left(\mathbb{N}^* r\right)$

Montrons par récurrence sur n que pour tout $r \in \mathbb{N}^*$:

$$\mu_1\left(\mathbb{N}^* r \backslash \bigcup_{i=1}^{n} \mathbb{N}^* r p_i\right) = \mu_2\left(\mathbb{N}^* r \backslash \bigcup_{i=1}^{n} \mathbb{N}^* r p_i\right)$$

Pour $n = 1$, on a

$$\begin{aligned} \mu_1\left(\mathbb{N}^* r \backslash \mathbb{N}^* r p_1\right) &= \mu_1\left(\mathbb{N}^* r\right) - \mu_1\left(\mathbb{N}^* r p_1\right) \\ &= \mu_2\left(\mathbb{N}^* r\right) - \mu_2\left(\mathbb{N}^* r p_1\right) \\ &= \mu_2\left(\mathbb{N}^* r \backslash \mathbb{N}^* r p_1\right) \end{aligned}$$

Supposons la relation vraie pour n et pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, on a alors

$$\mu_1\left(\mathbb{N}^* r \backslash \bigcup_{i=1}^{n+1} \mathbb{N}^* r p_i\right) = \mu_1\left(\mathbb{N}^* r\right) - \mu_1\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} \mathbb{N}^* r p_i\right)$$

la réunion de la relation $(*)$ est disjointe donc

$$\begin{aligned} \mu_1\left(\mathbb{N}^* r \backslash \bigcup_{i=1}^{n+1} \mathbb{N}^* r p_i\right) &= \mu_1\left(\mathbb{N}^* r\right) - \mu_1\left(\bigcup_{i=1}^{n} \mathbb{N}^* r p_i\right) + \mu_1\left(\mathbb{N}^* r p_{n+1} \backslash \bigcup_{i=1}^{n} \mathbb{N}^* r p_{n+1} p_i\right) \\ &= \mu_1\left(\mathbb{N}^* r \backslash \bigcup_{i=1}^{n} \mathbb{N}^* r p_i\right) + \mu_1\left(\mathbb{N}^* r p_{n+1} \backslash \bigcup_{i=1}^{n} \mathbb{N}^* r p_{n+1} p_i\right) \end{aligned}$$

L'hypothèse de récurrence donne

$$\begin{aligned} \mu_1\left(\mathbb{N}^* r \backslash \bigcup_{i=1}^{n+1} \mathbb{N}^* r p_i\right) &= \mu_2\left(\mathbb{N}^* r \backslash \bigcup_{i=1}^{n} \mathbb{N}^* r p_i\right) + \mu_2\left(\mathbb{N}^* r p_{n+1} \backslash \bigcup_{i=1}^{n} \mathbb{N}^* r p_{n+1} p_i\right) \\ &= \mu_2\left(\mathbb{N}^* r \backslash \bigcup_{i=1}^{n+1} \mathbb{N}^* r p_i\right) \end{aligned}$$

D'où le resultat pour tout n et r dans $\mathbb{N}^*$.

17.c) Soit n et r dans $\mathbb{N}^*$. La suite $\left(\mu_1\left(\mathbb{N}^* r \backslash \bigcup_{i=1}^{n} \mathbb{N}^* r p_i\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante minorée donc elle converge , de limite $\mu_1\left(\mathbb{N}^* r \backslash \bigcup_{i=1}^{+\infty} \mathbb{N}^* r p_i\right)$. On a alors

$$\mu_1\left(\mathbb{N}^* r \backslash \bigcup_{i=1}^{+\infty} \mathbb{N}^* r p_i\right) = \mu_2\left(\mathbb{N}^* r \backslash \bigcup_{i=1}^{+\infty} \mathbb{N}^* r p_i\right)$$

Si $r \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{N}^* r \backslash \bigcup_{i=1}^{+\infty} \mathbb{N}^* r p_i$ alors $a = k.r$ et $p_i \nmid k$ pour tout i dans $\mathbb{N}^*$, forcement $k = 1$ et $a = r$, donc

$$\mathbb{N}^* r \backslash \bigcup_{i=1}^{+\infty} \mathbb{N}^* r p_i = \{r\}$$

Ainsi $\forall r \in \mathbb{N}^*, \mu_1(\{r\}) = \mu_2(\{r\})$ d'où $\boxed{\mu_1 = \mu_2}$.

18. La relation ii) s'écrit , pour tout $r \in \mathbb{N}^*$,

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(X_n \in \mathbb{N}^* r\right) = \mathbb{P}(X \in \mathbb{N}^* r)$$

ou encore

$$\lim_{n\to+\infty} \mu_{X_n}\left(\mathbb{N}^* r\right) = \mu_X(\mathbb{N}^* r).$$

La suite $\left(\mu_{X_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est tendue, d'après **12.e)** il existe $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $\left(\mu_{X_{\psi(n)}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge , dans $\mathcal{B}\ \left(\mathcal{P}\left(\mathbb{N}^*\right), \mathbb{R}\right)$, vers une probabilité μ_{X_∞} .

Pour tout $r \in \mathbb{N}^*$ on a $\left|\mu_{X_{\psi(n)}}(\mathbb{N}^* r) - \mu_{X_\infty}(\mathbb{N}^* r)\right| \leq \left\|\mu_{X_{\psi(n)}} - \mu_{X_\infty}\right\|$ donc $\mu_{X_{\psi(n)}}(\mathbb{N}^* r) \underset{n\to+\infty}{\to} \mu_{X_\infty}(\mathbb{N}^* r)$, de plus

$$\mu_{X_{\psi(n)}}(\mathbb{N}^* r) \underset{n\to+\infty}{\to} \lim_{n\to+\infty} \mu_{X_n}\left(\mathbb{N}^* r\right) = \mu_X(\mathbb{N}^* r)$$

alors $\mu_X(\mathbb{N}^* r) = \mu_{X_\infty}(\mathbb{N}^* r)$, d'après la question **17)** on a $\mu_X = \mu_{X_\infty}$.

Ce qui prouve que μ_X est l'unique valeur d'adhérence de $(\mu_{X_n})_{n\in\mathbb{N}}$, de plus $(\mu_{X_n})_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée donc elle converge vers μ_X .

(c'est un exercice classique : toute suite réelle bornnée qui admet une unique valeur d'adhérence l , converge vers l) .

19. Soit $r \in \mathbb{N}^*$ et $i \in \{1, 2, \ldots, s\}$, on a

$$\left[r \mid X_n^{(i)}\right] = \bigcup_{1\leq k\leq\left[\frac{n}{r}\right]} \left[X_n^{(i)} = k.r\ \right] \quad \textit{(réunion disjointe)}$$

donc

$$\mathbb{P}\left(r \mid X_n^{(i)}\right) = \frac{1}{n}\left[\frac{n}{r}\right] \leqslant \frac{1}{r}$$

On a

$$\begin{aligned}
\left[r \mid Z_n^{(s)}\right] &= \bigcap_{1\leq i\leq s} \left[r \mid X_n^{(i)}\ \right] \\
&= \bigcup_{(k_1,..,k_s)\in[\![1,\left[\frac{n}{r}\right]]\!]} \left(\bigcap_{1\leq i\leq s} \left[X_n^{(i)} = rk_i\ \right]\right) \quad \textit{(réunion disjointe)}
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(r \mid Z_n^{(s)}\right) &= \sum_{(k_1,..,k_s)\in\left[\left[1,\left[\frac{n}{r}\right]\right]\right]} \mathbb{P}\left(\bigcap_{1\leq i\leq s} \left[r \mid X_n^{(i)}\ \right]\right) \\
&= \sum_{(k_1,..,k_s)\in[\![1,\left[\frac{n}{r}\right]]\!]} \prod_{1\leq i\leq s} \mathbb{P}\left(r \mid X_n^{(i)}\ \right) \quad \textit{(indépendance des } X_n^{(i)}\textit{)} \\
&= \left(\frac{1}{n}\left[\frac{n}{r}\right]\ \right)^s
\end{aligned}$$

d'où

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(r \mid Z_n^{(s)}\right) = \frac{1}{r^s}}$$

20.a) Soit $s > 1$ et Z une v.a.r telle que $Z(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{P}(Z = n) = \dfrac{1}{\zeta(s)n^s}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
Pour pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ on a .

$$[k \mid Z] = \bigcup_{h\in\mathbb{N}^*} [Z = k.h\ ] \quad \textit{(réunion disjointe)}$$

donc

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(k \quad \mid \quad Z) &= \sum_{h\in\mathbb{N}^*} \mathbb{P}\left(Z = k.h\ \right) \\ &= \sum_{h\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{\zeta(s)(k.h)^s} \\ &= \frac{1}{k^s} \end{aligned}$$

20.b) Soit $s \geqslant 2$ un entier. On utilise la question **18)** , les questions **19)** et **20.a)** donnent

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(r \mid Z_n^{(s)}\right) = \frac{1}{r^s} = \mathbb{P}(r \mid Z).$$

Vérifions que $\left(\mu_{Z_n^{(s)}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est tendue .
On a $\mathbb{P}\left(Z_n^{(s)} = k\right) \leq \mathbb{P}\left(k \mid Z_n^{(s)}\right) \leq \dfrac{1}{k^s}$ donc

$$\sum_{k\geq n+1} \mathbb{P}\left(Z_n^{(s)} = k\right) \leq \sum_{k\geq n+1} \frac{1}{k^s} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$$

Soit $\varepsilon > 0$ il existe N tel que , si $n \geq N$ alors $\sum\limits_{k\geq n+1} \frac{1}{k^s} < \varepsilon$, on en déduit que

$$\sum_{1\leq k\leq n} \mathbb{P}\left(Z_n^{(s)} = k\right) = \mu_{Z_n^{(s)}}\left(\{1, .., n\}\right) \geq 1 - \varepsilon$$

D'après la question **18)** la suite $\left(\mu_{Z_n^{(s)}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathcal{B}\ \left(\mathcal{P}\left(\mathbb{N}^*\right), \mathbb{R}\right)$ vers Z et donc vers μ_s *(car μ_s et Z sont de même loi).*

21. Soit $s, n \in \mathbb{N}^*$ avec $2 \leqslant s \leqslant n$. Les variables $X_n^{(1)}, X_n^{(2)}, \ldots, X_n^{(s)}$ sont indépendantes et suivent la loi uniforme sur $\{1, 2, \ldots, n\}$ et $Z_n^{(s)} = X_n^{(1)} \wedge \ldots \wedge X_n^{(s)}$. Donc

$$\mathbb{P}_n(s) = \mathbb{P}(Z_n^{(s)} = 1) = \mu_{Z_n^{(s)}}(1)$$

Ainsi

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}_n(s) = \mu_s(1) = \frac{1}{\zeta(s)}}$$

La question **7.c)** donne

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}_n(2) = \tfrac{6}{\pi^2} \approx 0.607\,93\ ,\ \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}_n(4) = \tfrac{90}{\pi^4} \approx 0.923\,94 \ \text{ et }\ \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}_n(6) = \tfrac{945}{\pi^6} \approx 0.982\,95\ .}$$