Probabilités Partie 1
Résumé

1) Notion de tribu

On dispose d'une expérience aléatoire (càd qu'on ne peut pas prevoir son résultat).

Vocabulaire

L'ensemble des issues (ou possibilités) de cette expérience aléatoire s'appelle Univers et se note Ω.

Résumé

Si T est une tribu sur Ω, on a :

1) ϕ et $\Omega \in T$
2) $A \in T \Longleftrightarrow \bar{A} \in T$
3) $\forall A, B \in T$, $A \setminus B \in T$
4) Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de T, alors

$$\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in T \text{ et } \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in T.$$

5) Si $(\forall 1 \leq k \leq n, A_k \in T)$ alors $\bigsqcup_{k=1}^{n} A_k$ et $\bigcap_{k=1}^{n} A_k \in T$.

2) Notion de probabilité

Résumé

Soit (Ω, T, P) un espace probabilisé.

1) $P(\Omega) = 1$ $\quad P(\phi) = 0$

2) Si $A \cap B = \phi$, alors $P(A \sqcup B) = P(A) + P(B)$

3) Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite Croissante d'éléments de T alors :

$$P\left(\bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n \to +\infty} P(A_n)$$

2) $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

4) Supposons que $A \subset B$. On a :

i) $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$

ii) $P(A) \leq P(B)$

5) Si $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une famille d'événements deux à deux incompatibles alors :

$$P\left(\bigsqcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

6) En général, si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'événements deux à deux incompatibles alors :

$$P\left(\bigsqcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$$

Vocabulaire

1) Le triplet (Ω, T, P) s'appelle espace probabilisé.

2) Les éléments de T s'appellent événements.

3) Si $A \cap B = \phi$, on dit que A et B sont deux événements incompatibles.

4) ϕ : l'événement impossible.

Ω : l'événement certain.

$\overline{A}$: l'événement contraire de A.

5) Si $P(A) = 0$, A est dit événement quasi-impossible.

Si $P(A) = 1$, A est dit événement quasi-certain.

6) $A \cap B$ se lit : A et B.

$A \cup B$ se lit : A ou B.

7) $A \subset B$ se lit : « Si A alors B »

Déf

On dit que $A_1, \dots, A_n$ forment un système complet d'événements si et ssi :

1) $\forall i \neq j$, $A_i \cap A_j = \phi$

2) $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$

NB On dit de même que $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un **système complet d'événements** si et ssi :

1) $\forall i\neq j,\ A_i\cap A_j=\emptyset$
2) $\displaystyle\bigsqcup_{n=0}^{+\infty} A_n=\Omega$

3) Probabilité Conditionnelle

Dans toute la suite du chapitre, (Ω, T, P) est un espace probabilisé.

Déf

Supposons que $P(B)\neq 0$.
La probabilité de A sachant que l'événement B est réalisé se note $P(A\mid B)$ ou $P_B(A)$, et est définie par :

$$P(A\mid B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

Prop

Supposons que $P(A)\neq 0$ et $P(B)\neq 0$. On a :

$$P(A\cap B)=P(A\mid B)\times P(B)$$
$$P(A\cap B)=P(B\mid A)\times P(A)$$

Prop

Supposons que $P(B)\neq 0$.
L'application $A\longmapsto P(A\mid B)$ est une probabilité sur (Ω, T).

Réflexes

$A \longmapsto P(A|B)$ est une probabilité, d'où :

1) $P(\bar{A}|B) = 1 - P(A|B)$

2) $P(\bigsqcup_i A_i | B) = \sum_i P(A_i|B)$, si les A_i sont 2 à 2 incompatibles.

4) Formule des probabilités totales

Prop

Soit $(A_1, \dots, A_n)$ un système complet d'événements tel que :

$$(\forall i, P(A_i) \neq 0)$$

Pour tout événement B on a :

$$\boxed{P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B \cap A_i)}$$

Càd :

$$\boxed{P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B|A_i) \times P(A_i)}$$

5) Formule de Bayes

Prop (Formule de Bayes)

Si $\begin{cases} 1)\ (A_1, \dots, A_n) \text{ est un système complet d'évenements.} \\ 2)\ \forall i,\ P(A_i) \neq 0 \end{cases}$

Alors :

$$\boxed{\forall B \in T,\ \forall j \in [\![1, n]\!],\ P(A_j \mid B) = \frac{P(B/A_j) \times P(A_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(B/A_i) \times P(A_i)}}$$

N.B :

En général les élèves ne mémorisent pas cette formule de Bayes mais ils la redémontrent en deux lignes en cas de besoin.

6) Formule des probabilités Composées

Prop (Formule des probabilités Composées)

Soient $A_1, \dots, A_n$ des évenements quelconques tels que :

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_n) \neq 0$$

On a :

$$\boxed{P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \times P(A_2 \mid A_1) \times P(A_3 \mid A_1 \cap A_2) \times \dots \times P(A_n \mid A_1 \cap \dots \cap A_{n-1})}$$

7) Indépendance d'évènements

Prop et déf

Soient A et B deux évènements tels que $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$.

1) Les propositions suivantes sont équivalentes :

   i) $P(A/B) = P(A)$

   ii) $P(B/A) = P(B)$

   iii) $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

2) Si l'une de ces propositions est vérifiée, on dit que les évènements A et B sont indépendants.

Vocabulaire

$A_1, \dots, A_n$ sont dits deux à deux indépendants si et ssi :

$$\forall i \neq j,\ A_i \text{ et } A_j \text{ sont indépendants}$$

Déf

Les évènements $A_1, \dots, A_n$ sont dits indépendants si et ssi pour toute partie finie I de $\{1, \dots, n\}$, on a :

$$\boxed{P\Big(\bigcap_{i \in I} A_i\Big) = \prod_{i \in I} P(A_i)}$$

Vocabulaire

On parle aussi de « mutuellement indépendants ».

Prop

$\left(A_1, A_2 \text{ et } A_3 \text{ sont indépendants}\right) \Longleftrightarrow \begin{cases} 1)\ A_1, A_2 \text{ et } A_3 \text{ sont deux à deux indépendants.} \\ 2)\ P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3) \end{cases}$

Prop

Si $(A_1, \ldots, A_n$ sont indépendants$)$

Alors $(A_1, \ldots, A_n$ sont deux à deux indépendants$)$

Attention

La réciproque est en général fausse.

Fin