Correction

d'après ICARE 98 et Archimède PC 97

Partie I

1. $J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $J^3 = I$. Puisque $J \times J^2 = I$, J est inversible et $J^{-1} = J^2$.

2.a $M(a,b,c) = a.I + b.J + c.J^2$ donc $E = \text{Vect}(I,J,J^2)$.
Par suite E est un sous-espace vectoriel et (I,J,J^2) en est une famille génératrice.
Supposons $\lambda.I + \mu.J + \nu.J^2 = O_3$. On a clairement $\lambda = \mu = \nu = 0$.
Par suite (I,J,J^2) est une famille libre et donc une base de E. $\dim E = 3$.

2.b $M(a,b,c)M(a',b',c') = (aa' + bc' + cb')I + (ab' + ba' + cc')J + (ac' + bb' + ca')J^2$ car $J^4 = J$.

2.c $E \subset M_3(\mathbb{R})$, $I \in E$ et $\forall M, M' \in E$ avec $M = M(a,b,c)$ et $M'(a',b',c')$ on a
$M - M' \in E$ et $MM' = M(aa' + bc' + cb', ab' + ba' + cc', ac' + bb' + ca') \in E$.
Par suite E est un sous-anneau de $M_3(\mathbb{R})$. Puisque $MM' = M'M$, ce sous-anneau est commutatif.

3.a $\det M = \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b+c & b & c \\ a+b+c & a & b \\ a+b+c & c & a \end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 0 & a-b & b-c \\ 0 & c-b & a-c \end{vmatrix}$
donne $\det M = (a+b+c)\left((a-b)(a-c) + (b-c)^2\right)$
ou via Sarrus $\det M = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$
M est inversible ssi $\det M \neq 0$.

3.b Compte tenu du calcul effectué en 2.b et du fait que (I,J,J^2) est libre :
$$MN = I \Leftrightarrow \begin{cases} ax + cy + bz = 1 \\ bx + ay + cz = 0 \\ cx + by + az = 0 \end{cases}$$
Le déterminant de ce système est $\begin{vmatrix} a & c & b \\ b & a & c \\ c & b & a \end{vmatrix} \underset{\text{par transposition}}{=} \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = \det M \neq 0$.
Ce système est donc de Cramer.

3.c Par les formules de Cramer :
$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & c & b \\ 0 & a & c \\ 0 & b & a \end{vmatrix}}{\det M} = \frac{a^2 - bc}{a^3 + b^3 + c^3 - 3abc},\ y = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & b \\ b & 0 & c \\ c & 0 & a \end{vmatrix}}{\det M} = \frac{c^2 - ab}{a^3 + b^3 + c^3 - 3abc},$$
$$z = \frac{\begin{vmatrix} a & c & 1 \\ b & a & 0 \\ c & b & 0 \end{vmatrix}}{\det M} = \frac{b^2 - ac}{a^3 + b^3 + c^3 - 3abc}.$$

Partie II

1.a $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \in O(3)$ donc $f \in O(E)$.
Soit $u = x.i + y.j + z.k \in E$. $f(u) = u \Leftrightarrow x = y = z$.
L'ensemble des vecteurs invariants par f est la droite $D = \text{Vect}(w)$ avec $w = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(i + j + k)$.
Par suite f est une rotation vectorielle autour de la droite D. Orientons celle-ci par le vecteur w et

notons θ l'angle de cette rotation. $\mathrm{tr}(f)=0=2\cos\theta+1$ donc $\cos\theta=-1/2$.

$\mathrm{Det}(u,i,f(i))=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{vmatrix}1&1&0\\1&0&0\\1&0&1\end{vmatrix}=-\frac{1}{\sqrt{3}}<0$ donc $\sin\theta<0$ puis $\theta=-\frac{2\pi}{3}\quad[2\pi]$. Finalement :

f est la rotation d'axe dirigé et orientons par $w=\frac{1}{\sqrt{3}}(i+j+k)$ et d'angle $\theta=-2\pi/3$.

1.b Par composition :

f^2 est la rotation d'axe dirigé et orientons par $w=\frac{1}{\sqrt{3}}(i+j+k)$ et d'angle $2\theta=-\frac{4\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}\quad[2\pi]$.

2. Soit $u=\frac{1}{\sqrt{2}}(i-j)$, $v=\frac{1}{\sqrt{6}}(i+j-2k)$ et $w=\frac{1}{\sqrt{3}}(i+j+k)$.

2.a $\|u\|=\|v\|=1$ et $(u\mid v)=0$ donc (u,v) est un famille orthonormée.

On observe par calculs : $u\wedge v=w$ et on peut conclure que (u,v,w) est une base orthonormée directe.

2.b On a $f(w)=w$ et puisque (u,v) est une base orthonormée directe du plan $\{w\}^{\perp}$ muni de l'orientation induite : $f(u)=\cos\theta.u+\sin\theta v=-\frac{1}{2}u-\frac{\sqrt{3}}{2}v$ et $f(v)=-\sin\theta u+\cos\theta v=\frac{\sqrt{3}}{2}u-\frac{1}{2}v$.

Par suite $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)=\begin{pmatrix}-1/2&\sqrt{3}/2&0\\-\sqrt{3}/2&-1/2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ puis $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f2)=\begin{pmatrix}-1/2&-\sqrt{3}/2&0\\\sqrt{3}/2&-1/2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

2.c $f_{a,b,c}=a.I+b.f+c.f^2$ donc $N(a,b,c)=\begin{pmatrix}\frac{2a-(b+c)}{2}&\frac{\sqrt{3}}{2}(b-c)&0\\\frac{\sqrt{3}}{2}(c-b)&\frac{2a-(b+c)}{2}&0\\0&0&a+b+c\end{pmatrix}$.

3.a $f_{a,b,c}\in O^+(E)\Leftrightarrow N(a,b,c)\in O^+(3)$ puisque $\mathcal{B}'$ est une base orthonormée.

$$N(a,b,c)\in O^+(3)\Leftrightarrow\begin{cases}\|C_1\|=\|C_2\|=\|C_3\|=1\\(C_1\mid C_2)=(C_2\mid C_3)=(C_3\mid C_1)=0\\\det(N(a,b,c))>0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(2a-(b+c))^2+3(b-c)^2=4\\(a+b+c)^2=1\\(\frac{(2a-(b+c))^2}{4}+\frac{3}{4}(b-c)^2)(a+b+c)>0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}4a^2-4ab-4ac+4b^2-4bc+4c^2=4\\(a+b+c)^2=1\\a+b+c>0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}4(a+b+c)^2-12(ab+ac+bc)=4\\a+b+c=1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a+b+c=1\\ab+ac+bc=0\end{cases}$$

3.b $P_m'(x)=3x^2-2x=x(3x-2)$ donc

x	$0 \quad 2/3$
$P_m'(x)$	$+ \quad 0 - 0 \quad +$

Ceci permet de construire le tableau de variation de P_m où on lit :

P_m admet trois racines réelles ssi $P_m(0)\geq 0$ et $P_m(2/3)\leq 0$ ce qui équivaut à $m\in[0,4/27]$.

3.c Si $f_{a,b,c}$ est une rotation vectorielle alors $\begin{cases} a+b+c=1 \\ ab+bc+ca=0 \end{cases}$.

Or a,b,c sont les trois racines du polynômes $(X-a)(X-b)(X-c)=P_m$ avec $m=-abc$.

Puisque P_m admet trois racines $m\in[0,4/27]$ et on conclut.

Inversement, si a,b,c sont les trois racines réelles de P_m avec $m\in[0,4/27]$ alors, de par les relations entre racines et coefficients d'un polynôme scindé on a $\begin{cases} a+b+c=1 \\ ab+bc+ca=0 \end{cases}$ et donc f est une rotation.