Centrale, 2016, MP, II

(10 pages)

Partie I

I.A -

I.A.1) Soit $g:\ (x,t) \longmapsto \dfrac{1-\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{e}^{-xt}$ de sorte que $f(x) = \displaystyle\int_0^{\infty} g(x,t)\,\mathrm{d}t$.

$\diamond$ On a :

- $\forall t \in]0,+\infty[,\ x \mapsto g(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc sur $\mathbb{R}_+$;
- $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ t \mapsto g(x,t)$ est continue (par morceaux) sur $]0,+\infty[$;
- $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \forall t \in]0,+\infty[,\ \big|g(x,t)\big| \leqslant \dfrac{1-\cos(t)}{t^2}$ et $\varphi_0:\ t \mapsto \dfrac{1-\cos(t)}{t^2}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ car :
  - $\varphi_0 = g(0,\cdot)$ est continue sur $]0,+\infty[$,
  - au voisinage de 0, $\varphi_0(t) \underset{t\to 0^+}{\sim} \dfrac{1}{2}$ donc $\varphi_0(t) \underset{t\to 0^+}{=} O(1)$ avec $t \mapsto 1$ intégrable sur $]0,1]$,
  - au voisinage de $+\infty$,$\varphi_0(t) \underset{t\to+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ avec $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ intégrable sur $[1,+\infty[$.

Le théorème de continuité des intégrales à paramètre donne que $\underline{f \text{ est définie et continue sur } \mathbb{R}_+}$.

$\diamond$ On a donc aussi :

- $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ t \mapsto g(x,t)$ est continue (par morceaux) et intégrable sur $]0,+\infty[$;
- $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall t \in]0,+\infty[,\ \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t) = -\dfrac{1-\cos(t)}{t}\,\mathrm{e}^{-xt}$ et $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t) = (1-\cos(t))\,\mathrm{e}^{-xt}$ existent;
- $\forall t \in]0,+\infty[,\ x \mapsto \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ et $x \mapsto \dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t)$ sont continues sur $\mathbb{R}_+^*$;
- $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ t \mapsto \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ et $x \mapsto \dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t)$ sont continues (par morceaux) sur $]0,+\infty[$;
- $\forall a > 0,\ \forall x \in [a,+\infty[,\ \forall t \in]0,+\infty[,\ \left|\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \dfrac{1-\cos(t)}{t}\,\mathrm{e}^{-at} = \varphi_1(t)$ avec φ_1 intégrable sur $]0,+\infty[$ car :
  - φ_1 est continue sur $]0,+\infty[$,
  - au voisinage de 0, $\varphi_1(t) \underset{t\to 0^+}{\sim} \dfrac{t}{2}$ donc $\varphi_1(t) \underset{t\to 0^+}{=} o(1)$ avec $t \mapsto 1$ intégrable sur $]0,1]$,
  - comme $a > 0$, au voisinage de $+\infty$,$\varphi_1(t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ avec $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ intégrable sur $[1,+\infty[$;
- $\forall a > 0,\ \forall x \in [a,+\infty[,\ \forall t \in]0,+\infty[,\ \left|\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t)\right| \leqslant 2\,\mathrm{e}^{-at} = \varphi_2(t)$ avec φ_2 intégrable sur $]0,+\infty[$ car :
  - φ_2 est continue sur $[0,+\infty[$,
  - comme $a > 0$, au voisinage de $+\infty$,$\varphi_2(t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ avec $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ intégrable sur $[1,+\infty[$.

Ainsi le théorème de dérivation des intégrales à paramètre donne que f est de classe C^2 sur $[a,+\infty[$. Ceci étant valable pour tout $a > 0$, on a $\underline{f \text{ de classe } C^2 \text{ sur } \mathbb{R}_+^*}$.

I.A.2) $\diamond$ La domination de $g(x,t)$ établie au premier point du [**1**] permet d'utiliser le théorème de convergence dominée:

- $\forall t \in]0,+\infty[,\ g(x,t) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$;
- $t \mapsto 0$ est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$;
- $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \forall t \in]0,+\infty[,\ \big|g(x,t)\big| \leqslant \varphi_0(t)$ avec φ_0 intégrable sur $]0,+\infty[$;

donc $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \displaystyle\int_0^{\infty} 0\,\mathrm{d}t$ soit $\underline{f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0}$.

$\diamond$ La formule de Leibniz donne $\forall x > 0,\ f'(x) = \displaystyle\int_0^{\infty} \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t$ et, comme ci-dessus:

- $\forall t \in]0,+\infty[,\ \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t) = -\dfrac{1-\cos(t)}{t}\,\mathrm{e}^{-xt} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$;
- $t \mapsto 0$ est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$;
- $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \forall t \in]0,+\infty[,\ \left|\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \varphi_1(t)$ avec φ_1 intégrable sur $]0,+\infty[$;

donc, par convergence dominée, $\underline{f'(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0}$.

I.A.3) $\diamond$ La formule de Leibniz donne aussi $\forall x>0,\ f''(x) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t)\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty (1-\cos(t))\,\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t$ soit

$$\begin{aligned}\forall x>0,\ f''(x) &= \Re e\left(\int_0^\infty \left(1-\mathrm{e}^{it}\right)\,\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t\right) = \Re e\left(\int_0^\infty \left(\mathrm{e}^{-xt}-\mathrm{e}^{(i-x)t}\right)\,\mathrm{d}t\right)\\ &= \Re e\left(\left[-\frac{\mathrm{e}^{-xt}}{x}+\frac{\mathrm{e}^{(i-x)t}}{x-i}\right]_0^\infty\right) = \Re e\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x-i}\right)\\ &= \Re e\left(\frac{1}{x}-\frac{x+i}{x^2+1}\right)\end{aligned}$$

donc $\underline{\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f''(x) = \dfrac{1}{x}-\dfrac{x}{x^2+1}}$.

$\diamond$ Il existe donc une constante C_1 telle que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) = \ln(x) - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C_1 = \frac{1}{2}\ln\left(\dfrac{x^2}{x^2+1}\right) + C_1$.
Donc $f'(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} C_1$ et donc, selon [**2**], $C_1 = 0$. Donc $\underline{\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) = \ln(x) - \frac{1}{2}\ln(x^2+1)}$.

I.A.4) $\diamond$ Si F est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $F(x) = x\ln(x) - \frac{x}{2}\ln(x^2+1) - \arctan(x)$ alors F est C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et $F'(x) = \ln(x) + 1 - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - \dfrac{x^2}{x^2+1} - \dfrac{1}{x^2+1} = f'(x)$. On en déduit l'existence d'une constante C_0 telle que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) = F(x) + C_0$. Or

$$F(x) = -\frac{x}{2}\ln\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right) - \arctan(x) = -\frac{x}{2}\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) - \arctan(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\frac{\pi}{2}$$

donc, selon [**2**], $C_0 = \frac{\pi}{2}$. Ainsi $\underline{\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) = x\ln(x) - \frac{x}{2}\ln(x^2+1) - \arctan(x) + \frac{\pi}{2}}$.

$\diamond$ Mais f est continue en 0 selon [**1**] et $F(x) + \frac{\pi}{2} \xrightarrow[x\to 0^+]{} \frac{\pi}{2}$ donc $\underline{f(0) = \frac{\pi}{2}}$.

I.A.5) Si $s=0$, on a $\forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ \dfrac{1-\cos(st)}{t^2} = 0$ donc $|s| = 0 = \displaystyle\int_0^\infty \frac{1-\cos(st)}{t^2}\,\mathrm{d}t$.
Si $s \neq 0$, le changement de variable $t = |s|\,u$ est C^1 strictement croissant de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a donc

$$\frac{\pi}{2} = f(0) = \int_0^\infty \frac{1-\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty \frac{1-\cos(|s|\,u)}{s^2\,u^2}\,|s|\,\mathrm{d}u = \frac{1}{|s|}\int_0^\infty \frac{1-\cos(|s|\,u)}{u^2}\,\mathrm{d}u.$$

Par parité du cos, on a donc $\underline{\forall s \in \mathbb{R},\ |s| = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty \frac{1-\cos(su)}{u^2}\,\mathrm{d}u}$.

I.B -

I.B.1) $\diamond$ Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $g_n(t) = \dfrac{1-(\cos(t))^n}{t^2}$. g_n est continue sur $]0,+\infty[$, $g_n(t) \underset{t\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^2}\right)$ et

$$g_n(t) \underset{t\to0^+}{=} \frac{1}{t^2}\left[1-\left(1-\frac{t^2}{2}+o\left(t^2\right)\right)^n\right] = \frac{1}{t^2}\left[1-\left(1-n\frac{t^2}{2}+o\left(t^2\right)\right)\right] \underset{t\to0^+}{\sim} \frac{n}{2} = O(1)$$

donc g_n est intégrable sur $]0,+\infty[$. Donc $\underline{\left(u_n\right)_{n\geqslant1} \text{ est définie}}$.

$\diamond$ $\forall n \geqslant 1,\ u_{2n+2} - u_{2n} = \displaystyle\int_0^\infty \frac{\left(1-(\cos(t))^2\right)(\cos(t))^n}{t^2}\,\mathrm{d}t$ et $\forall t>0,\ \dfrac{\left(1-(\cos(t))^2\right)(\cos(t))^n}{t^2} \geqslant 0$ donc $u_{2n+2} - u_{2n} \geqslant 0$. On a donc $\underline{\left(u_{2n}\right)_{n\geqslant1} \text{ est croissante}}$.

I.B.2) $\diamond$ $u_1 = \displaystyle\int_0^\infty \frac{1-\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t = f(0)$ donc, selon [**A.4**], $\underline{u_1 = \frac{\pi}{2}}$.

$\diamond$ $\forall t > 0,\ \dfrac{1-(\cos(t))^2}{t^2} = \dfrac{1-\cos(2t)}{2t^2}$ donc le résultat de [**A.5**] donne $u_2 = \frac{1}{2}\left(|2|\frac{\pi}{2}\right)$ soit $\underline{u_2 = \frac{\pi}{2}}$.

I.C -

I.C.1) Appliquons le changement de variable $t = \sqrt{\dfrac{2u}{n}}$ qui est C^1 et strictement croissant de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}_+^*$ à u_n. Ceci donne

$$u_n = \int_0^\infty \frac{1-\left(\cos\left(\sqrt{2u/n}\right)\right)^n}{2u/n}\sqrt{\frac{2}{n}}\,\frac{\mathrm{d}u}{2\sqrt{u}}$$

c'est à dire $\underline{u_n = \dfrac{\sqrt{n}}{2\sqrt{2}}\,v_n \text{ avec } v_n = \displaystyle\int_0^\infty \frac{1-\left(\cos\left(\sqrt{2u/n}\right)\right)^n}{u\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u}$.

I.C.2) Pour $x \in [-1,1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\left|1-x^n\right| = \left|(1-x)\sum\limits_{k=0}^{n-1} x^k\right| \leqslant |1-x|\sum\limits_{k=0}^{n-1}|x|^k \leqslant n|1-x|$ donc

$$\forall u \in \mathbb{R}_+^*,\ \left|1-\left(\cos\left(\sqrt{2u/n}\right)\right)^n\right| \leqslant n\left|1-\cos\left(\sqrt{2u/n}\right)\right| = 2n\sin^2\left(\sqrt{\frac{u}{2n}}\right).$$

Or, par concavité de sin, $\forall \theta \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right],\ 0 \leqslant \sin\theta \leqslant \theta$ ("*la courbe est en dessous de la tangente en* 0") donc $\forall u \in]0,1],\ \forall n \geqslant 1,\ \sin^2\left(\sqrt{\frac{u}{2n}}\right) \leqslant \frac{u}{2n}$ et donc $\underline{\forall u \in]0,1],\ \forall n \geqslant 1,\ \left|1-\left(\cos\left(\sqrt{2u/n}\right)\right)^n\right| \leqslant u}$.

I.C.3) Soit $h_n(u) = \dfrac{1-\left(\cos\left(\sqrt{2u/n}\right)\right)^n}{u\sqrt{u}}$. On a :

- $\forall u \in]0,+\infty[,\ h_n(u) \underset{n\to\infty}{=} \dfrac{1}{u\sqrt{u}}\left[1-\exp\left(n\ln\left[1-\dfrac{u}{n}+o\left(\dfrac{1}{n}\right)\right]\right)\right]$
$\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1-\mathrm{e}^{-u}}{u\sqrt{u}}$;
- $u \mapsto \dfrac{1-\mathrm{e}^{-u}}{u\sqrt{u}}$ est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$;
- selon [**2**], $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall u \in]0,+\infty[,\ \left|h_n(u)\right| \leqslant \psi(u)$ avec

$$\psi(u) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{u}} & \text{si } u \in]0,1], \\ \dfrac{2}{u\sqrt{u}} & \text{si } u \in]1,+\infty[, \end{cases}$$

et ψ est intégrable sur $]0,+\infty[$ car continue par morceaux sur $]0,+\infty[$, dominée au voisinage de 0^+ par $u \mapsto \dfrac{1}{u^{1/2}}$ intégrable sur $]0,1]$ puisque $\frac{1}{2} < 1$ et dominée au voisinage de $+\infty$ par $u \mapsto \dfrac{1}{u^{3/2}}$ intégrable sur $]1,+\infty[$ puisque $\frac{3}{2} > 1$;

donc, par convergence dominée, $\underline{v_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \displaystyle\int_0^\infty \frac{1-\mathrm{e}^{-u}}{u\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u}$.

I.C.4) En intégrant par parties,

$$\begin{aligned}\int_x^y \frac{1-\mathrm{e}^{-u}}{u\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u &= \left[\left(1-\mathrm{e}^{-u}\right)\frac{-2}{\sqrt{u}}\right]_x^y - \int_x^y \mathrm{e}^{-u}\frac{-2}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u \\ &= 2\frac{1-\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{x}} - 2\frac{1-\mathrm{e}^{-y}}{\sqrt{y}} + 2\int_x^y \frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u\end{aligned}$$

et $2\dfrac{1-\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{x}} \underset{x\to 0^+}{\sim} \sqrt{x} \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$, $2\dfrac{1-\mathrm{e}^{-y}}{\sqrt{y}} \underset{xy\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{y}} \xrightarrow[y\to+\infty]{} 0$ donc, avec le résultat admis, $v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 2\sqrt{\pi}$.
L'égalité du [**1**] donne alors $\underline{u_n \underset{n\to\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{n\pi}{2}}}$.

Partie II

II.A -

II.A.1) ◇ Par linéarité de l'espérance, $\underline{E(S_n)=0}$.

◇ S_n est une somme de variables indépendantes donc $V(S_n)=\sum\limits_{k=1}^{n} V(X_k)$ donc $\underline{V(S_n)=n}$.

II.A.2) On a $E\big(\cos(S+T)\big) = E\big(\cos(S)\cos(T)-\sin(S)\sin(T)\big) = E\big(\cos(S)\cos(T)\big) - E\big(\sin(S)\sin(T)\big)$. Or, selon le lemme des coalitions, S et T étant indépendantes, $\cos(S)$ et $\cos(T)$ (respectivement $\sin(S)$ et $\sin(T)$) sont indépendantes. Donc $E\big(\cos(S+T)\big)=E\big(\cos(S)\big)E\big(\cos(T)\big)-E\big(\sin(S)\big)E\big(\sin(T)\big)$. Comme T et $-T$ ont la même loi, par imparité de sin, $\sin(T)$ et $-\sin(T)$ aussi donc $E\big(\sin(T)\big)=E\big(-\sin(T)\big)$ donc $E\big(\sin(T)\big)=0$. Donc $\underline{E\big(\cos(S+T)\big)=E\big(\cos(S)\big)E\big(\cos(T)\big)}$.

II.A.3) Montrons le résultat par récurrence sur n. Pour $n=1$, $E\big(\cos(S_1t)\big)=E\big(\cos(X_1t)\big)=\frac{1}{2}\cos(t)+\frac{1}{2}\cos(-t)=\cos(t)$. Si le résultat est vrai pour $n\geqslant 1$, $E\big(\cos(S_{n+1}t)\big)=E\big(\cos(S_nt+X_{n+1}t)\big)$. Or S_nt et $X_{n+1}t$ sont indépendantes et la loi de $X_{n+1}t$ est la même que celle de $-X_{n+1}t$ donc, selon [**2**], $E\big(\cos(S_{n+1}t)\big)=E\big(\cos(S_nt\big)E\big(\cos(X_{n+1}t)\big)=(\cos(t))^n\,\cos(t)=(\cos(t))^{n+1}$.
Donc $\underline{\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \forall t\in\mathbb{R},\ E\big(\cos(S_nt\big)=(\cos(t))^n}$.

II.A.4) Par la formule de transfert,

$$\begin{aligned}
E\big(|S_n|\big) &= \sum_{s\in S_n(\Omega)} |s|P(S_n=s) = \frac{2}{\pi}\sum_{s\in S_n(\Omega)} P(S_n=s)\int_0^\infty \frac{1-\cos(su)}{u^2}\,\mathrm{d}u\\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \sum_{s\in S_n(\Omega)} P(S_n=s)\frac{1-\cos(su)}{u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{1}{u^2}\left[1-\sum_{s\in S_n(\Omega)} P(S_n=s)\cos(su)\right]\mathrm{d}u\\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{1}{u^2}\left[1-E\big(\cos(S_nu)\right]\mathrm{d}u = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{1}{u^2}\left[1-(\cos(u))^n\right]\mathrm{d}u \quad \text{selon [}\mathbf{3}\text{].}
\end{aligned}$$

On a donc bien $\underline{\forall n\in\mathbb{N},\ E\big(|S_n|\big)=\frac{2}{\pi}\,u_n}$.

II.A.5) Donc

$$\begin{aligned}
\frac{2}{\pi}\big(u_{2n+2}-u_{2n+1}\big) &= E\big(|S_{2n+2}|\big)-E\big(|S_{2n+1}|\big)\\
&= \sum_{s\in S_{2n+2}(\Omega)} |s|P(S_{2n+2}=s) - \sum_{s\in S_{2n+1}(\Omega)} |s|P(S_{2n+1}=s)
\end{aligned}$$

Or $S_{2n+1}(\Omega)\subset [\![-2n-1,2n+1]\!]$ et $S_{2n+2}(\Omega)\subset[\![-2n-2,2n+2]\!]$.
De plus, la formule des probabilités totales donne, pour tout $s\in[\![-2n-2,2n+2]\!]$,

$$\begin{aligned}
P(S_{2n+2}=s) &= P\big((S_{2n+2}=s)\cap(X_{2n+2}=1)\big)+P\big((S_{2n+2}=s)\cap(X_{2n+2}=-1)\big)\\
&= P\big((S_{2n+1}=s-1)\cap(X_{2n+2}=1)\big)+P\big((S_{2n+1}=s+1)\cap(X_{2n+2}=-1)\big)\\
&= \frac{1}{2}\Big(P(S_{2n+1}=s-1)+P(S_{2n+1}=s+1)\Big).
\end{aligned}$$

Ceci donne

$$\begin{aligned}
\frac{2}{\pi}\big(u_{2n+2}-u_{2n+1}\big) &= \sum_{s=-2n-2}^{2n+2}\frac{|s|}{2}\Big(P(S_{2n+1}=s-1)+P(S_{2n+1}=s+1)\Big)-\sum_{s=-2n-1}^{2n+1}|s|P(S_{2n+1}=s)\\
&= \sum_{s=-2n-3}^{2n+1}\frac{|s+1|}{2}P(S_{2n+1}=s)+\sum_{s=-2n-1}^{2n+3}\frac{|s-1|}{2}P(S_{2n+1}=s)-\sum_{s=-2n-1}^{2n+1}|s|P(S_{2n+1}=s)\\
&= \frac{1}{2}\sum_{s=-2n-1}^{2n+1}\Big(|s+1|+|s-1|-2|s|\Big)P(S_{2n+1}=s)
\end{aligned}$$

Or $|s+1|+|s-1|-2|s| = \begin{cases} (s+1)+(s-1)-2s=0 & \text{si } s \geqslant 1 \\ -(s+1)-(s-1)+2s=0 & \text{si } s \leqslant -1 \\ 2 & \text{si } s=0 \end{cases}$ donc

$$\frac{2}{\pi}\left(u_{2n+2}-u_{2n+1}\right) = P(S_{2n+1}=0).$$

Mais $\forall \omega \in \Omega,\ S_{2n+1}(\omega) = \sum_{k=1}^{2n+1} X_k(\omega) \equiv \sum_{k=1}^{2n+1} 1 \equiv 1$ modulo 2 donc $P(S_{2n+1}=0)=0$ et donc $\underline{\forall n \in \mathbb{N},\ u_{2n+2} = u_{2n+1}}$.

II.B -

II.B.1) Montrons $\underline{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ E(S_n^4) = 3n^2-2n}$ par récurrence sur n:

$\to$ pour $n=1$, $S_1 = X_1$ donc $E(S_1^4) = \frac{1}{2}1^4 + \frac{1}{2}(-1)^4 = 1 = 3\times 1^2 + 2 \times 1$;
$\to$ si le résultat est vrai pour n, on a

$$\begin{aligned} E(S_{n+1}^4) &= E\big((S_n+X_{n+1})^4\big) = E\big(S_n^4 + 4S_n^3X_{n+1} + 6S_n^2X_{n+1}^2 + 4S_nX_{n+1}^3 + X_{n+1}^4\big) \\ &= E\big(S_n^4\big) + 4E\big(S_n^3X_{n+1}\big) + 6E\big(S_n^2X_{n+1}^2\big) + 4E\big(S_nX_{n+1}^3\big) + E\big(X_{n+1}^4\big) \\ &= E\big(S_n^4\big) + 4E\big(S_n^3\big)E\big(X_{n+1}\big) + 6E\big(S_n^2\big)E\big(X_{n+1}^2\big) + 4E\big(S_n\big)E\big(X_{n+1}^3\big) + E\big(X_{n+1}^4\big) \\ &= 3n^2 - 2n + 4E\big(S_n^3\big)\times 0 + 6 \times n \times 1 + 4 \times 0 \times 0 + 1 \\ &= 3n^2+4n+1 = 3n^2+6n+3-2n-2 = 3(n+1)^2 - 2(n+1) \quad \text{CQFD} \end{aligned}$$

II.B.2) On a $P\left(U_n \geqslant \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = P\left(S_n^4 \geqslant n^3\sqrt{n}\right)$ et, puisque S_n^4 est positive, l'inégalité de Markov donne

$$P\left(S_n^4 \geqslant n^3\sqrt{n}\right) \leqslant \frac{E(S_n^4)}{n^3\sqrt{n}} = \frac{3n^2-2n}{n^3\sqrt{n}} \leqslant \frac{3n^2}{n^3\sqrt{n}}$$

soit $\underline{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P\left(U_n \geqslant \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \leqslant \frac{3}{n^{3/2}}}$.

II.B.3) $\diamond$ On a $\mathcal{Z}_n = \bigcup_{k \geqslant n} \left\{\omega \in \Omega,\ U_k(\omega) \geqslant \frac{1}{\sqrt{k}}\right\}$ et, pout tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\left\{\omega \in \Omega,\ U_k(\omega) \geqslant \frac{1}{\sqrt{k}}\right\} \in \mathcal{A}$ car U_k est une variable aléatoire sur $\big(\Omega, \mathcal{A}, P\big)$. Donc, par propriété de la tribu $\mathcal{A}$, $\underline{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathcal{Z}_n \in \mathcal{A}}$.

$\diamond$ Par l'inégalité de Boole et le résultat de [**2**],

$$0 \leqslant P(\mathcal{Z}_n) \leqslant \sum_{k \geqslant n} P\left(U_k \geqslant \frac{1}{\sqrt{k}}\right) \leqslant \sum_{k=n}^{\infty} \frac{3}{k^{3/2}}.$$

Le majorant est le reste d'une série convergente dont tend vers 0 et donc $\underline{\lim_{n\to\infty} P(\mathcal{Z}_n) = 0}$.

II.B.4) Comme $\mathcal{Z}_{n+1} \subset \mathcal{Z}_n$, par continuité décroissante, $P(\mathcal{Z}) = \lim_{n\to\infty} P(\mathcal{Z}_n) = 0$. Mais

$$\begin{aligned} \Omega \setminus \mathcal{Z} &= \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \left[\bigcap_{k \geqslant n} \left\{U_k \geqslant \frac{1}{\sqrt{k}}\right\}^c\right] = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \left[\bigcap_{k \geqslant n} \left\{\left|\frac{S_k}{k}\right| < \frac{1}{k^{1/8}}\right\}\right] \\ &= \left\{\omega \in \Omega \,\middle|\, \exists n \in \mathbb{N}^*,\ \forall k \geqslant n,\quad \left|\frac{S_k(\omega)}{k}\right| < \frac{1}{k^{1/8}}\right\} \end{aligned}$$

En particulier, $\forall \omega \in \Omega \setminus \mathcal{Z},\ \frac{S_k(\omega)}{k} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$.

Donc $\underline{\left(\dfrac{S_n}{n}\right) \text{ converge presque sûrement vers } 0}$.

Partie III

III.A -

III.A.1) On a $T_{n+1}(\Omega) = \{t \pm a_{n+1} \mid t \in T_n(\Omega)\} = \Big(-a_{n+1} + T_n(\Omega)\Big) \cup \Big(a_{n+1} + T_n(\Omega)\Big)$.

Pour $u \in T_{n+1}(\Omega)$, on a donc $P\big((T_{n+1} = u) \cap (X_{n+1} = 1)\big) = \begin{cases} P(T_n = u - a_{n+1})/2 & \text{si } u \in a_{n+1} + T_n(\Omega), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

De même, $P\big((T_{n+1} = u) \cap (X_{n+1} = -1)\big) = \begin{cases} P(T_n = u + a_{n+1})/2 & \text{si } u \in -a_{n+1} + T_n(\Omega), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

Or, le théorème de transfert donne :

$$\begin{aligned}
E\big(|T_{n+1}|\big) &= \sum_{u \in T_{n+1}(\Omega)} |u|\, P\big(T_{n+1} = u\big) \\
&= \sum_{u \in T_{n+1}(\Omega)} |u| \Big[P\big((T_{n+1} = u) \cap (X_{n+1} = 1)\big) + P\big((T_{n+1} = u) \cap (X_{n+1} = -1)\big)\Big] \\
&= \sum_{u \in T_{n+1}(\Omega)} |u| \Big[P\big((T_n = u - a_{n+1}) \cap (X_{n+1} = 1)\big) + P\big((T_n = u + a_{n+1}) \cap (X_{n+1} = -1)\big)\Big] \\
&= \frac{1}{2}\left[\sum_{u \in a_{n+1} + T_n(\Omega)} |u|\, P\big(T_n = u - a_{n+1}\big) + \sum_{u \in -a_{n+1} + T_n(\Omega)} |u|\, P\big(T_n = u + a_{n+1}\big)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\sum_{x \in T_n(\Omega)} |x + a_{n+1}|\, P\big(T_n = x\big) + \sum_{x \in T_n(\Omega)} |x - a_{n+1}|\, P\big(T_n = x\big)\right] \\
&= \frac{1}{2} \sum_{x \in T_n(\Omega)} \big[|x + a_{n+1}| + |x - a_{n+1}|\big]\, P\big(T_n = x\big) \\
&\geqslant \frac{1}{2} \sum_{x \in T_n(\Omega)} |(x + a_{n+1}) + (x - a_{n+1})|\; P\big(T_n = x\big) \\
&\geqslant \sum_{x \in T_n(\Omega)} |x|\; P\big(T_n = x\big) = E\big(|T_n|\big)
\end{aligned}$$

donc $\underline{\text{la suite } \big(E(|T_n|)\big)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ est croissante}}$.

III.A.2) $|T_n|$ étant une variable aléatoire finie, elle admet une variance et $V\big(|T_n|\big) \geqslant 0$ donc, selon la formule de König-Huygens, $\big[E\big(|T_n|\big)\big]^2 \leqslant E\big(|T_n|^2\big) = E\big(T_n^2\big)$. Or $T_n^2 = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k^2 X_k^2 + 2 \sum\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant n} a_i a_j X_i X_j$ donc, par linéarité de l'espérance et indépendance des X_k,

$$\big[E\big(|T_n|\big)\big]^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \underbrace{E\big(X_k^2\big)}_{=1} + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} a_i a_j \underbrace{E\big(X_i\big) E\big(X_j\big)}_{=0} = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$$

puisque $\left(\sum a_k^2\right)$ converge. Ainsi la suite $\big(E\big(|T_n|\big)\big)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante et majorée par $\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k^2}$ donc $\underline{\big(E\big(|T_n|\big)\big)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ est convergente}}$.

III.A.3) On a

$$\begin{aligned}
E\big(|T_n|\big) &= \sum_{u \in |T_n|(\Omega)} u\, P\big(|T_n| = u\big) \\
&= \sum_{u \in |T_n|(\Omega)} u \Big[P\big((|T_n| = u) \cap (X_1 = 1)\big) + P\big((|T_n| = u) \cap (X_1 = -1)\big)\Big]
\end{aligned}$$

Posons $S = \sum_{k=2}^{n} a_k X_k$. Or $\omega \in (|T_n| = u) \cap (X_1 = 1) \iff (X_1(\omega) = 1$ et $|a_1 + S(\omega)| = u)$. Comme $S(\omega) \geqslant -\sum_{k=2}^{n} a_k \geqslant -a_1$, si $\omega \in (|T_n| = u) \cap (X_1 = 1)$, on a $a_1 + S(\omega) = u$. Réciproquement, si $X_1(\omega) = 1$ et $a_1 + S(\omega) = u$, on a bien $\omega \in (|T_n| = u) \cap (X_1 = 1)$.
Donc $(|T_n| = u) \cap (X_1 = 1) = (S = u - a_1) \cap (X_1 = 1)$.
De même, $(|T_n| = u) \cap (X_1 = -1) = (S = -u + a_1) \cap (X_1 = -1)$.
Or, selon le lemme des coalitions, X_1 et S sont indépendants donc

$$\begin{aligned}
E\big(|T_n|\big) &= \frac{1}{2}\left[\sum_{u \in T_n(\Omega)} uP\big(S = u - a_1\big) + \sum_{u \in T_n(\Omega)} uP\big(S = -u + a_1\big)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\sum_{x \in -a_1 + T_n(\Omega)} (x + a_1)P\big(S = x\big) + \sum_{x \in a_1 + T_n(\Omega)} (a_1 - x)P\big(S = x\big)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\sum_{x \in S(\Omega)} (x + a_1)P\big(S = x\big) + \sum_{x \in S(\Omega)} (a_1 - x)P\big(S = x\big)\right] \\
&= a_1 \sum_{x \in S(\Omega)} P\big(S = x\big) = a_1.
\end{aligned}$$

D'autre part, $E\big(|T_1|\big) = a_1 E\big(|X_1|\big) = 1$ car $|X_1|$ est la variable certaine valant 1.
Donc $\underline{\text{si } a_1 \geqslant a_2 + \cdots + a_n \text{ alors } E\big(|T_n|\big) = E\big(|T_1|\big) = a_1}$.

III.B -

III.B.1) $\diamond$ Soit, pour $n \geqslant 1$, $j_n(t) = \dfrac{1 - \cos(t)\cos\left(\frac{t}{3}\right)\cdots\cos\left(\frac{t}{2n-1}\right)}{t^2}$. j_n est continue sur $]0, +\infty[$, au voisinage de 0,

$$\begin{aligned}
j_n(t) &= \frac{1}{t^2}\left[1 - \left(1 - \frac{t^2}{2} + o\left(t^2\right)\right)\left(1 - \frac{t^2}{18} + o\left(t^2\right)\right)\cdots\left(1 - \frac{t^2}{2(2n-1)^2} + o\left(t^2\right)\right)\right] \\
&= \frac{1}{t^2}\left[1 - \left(1 - \frac{t^2}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2n-1)^2} + o\left(t^2\right)\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2n-1)^2} + o\left(1\right) = O(1)
\end{aligned}$$

et $\forall t > 0$, $\big|j_n(t)\big| \leqslant \dfrac{2}{t^2}$.

Ainsi j_n est intégrable sur $]0, +\infty[$ et donc $\underline{J_n = \int_0^\infty \dfrac{1 - \cos(t)\cos\left(\frac{t}{3}\right)\cdots\cos\left(\frac{t}{2n-1}\right)}{t^2}\,\mathrm{d}t \text{ existe}}$.

$\diamond$ Prenons, pour $k \geqslant 1$, $a_k = \dfrac{1}{2k-1} \geqslant 0$. La série $\left(\sum a_k^2\right) = \left(\sum \dfrac{1}{(2k-1)^2}\right)$ est convergente car $\dfrac{1}{(2k-1)^2} = O\left(\dfrac{1}{k^2}\right)$. Soit $T_n = \sum_{k=1}^{n} a_k X_k$.

$$\begin{aligned}
\frac{\pi}{2} E\big(|T_n|\big) &= \sum_{s \in T_n(\Omega)} P\big(T_n = s\big)\,|s| = \sum_{s \in T_n(\Omega)} P\big(T_n = s\big) \int_0^\infty \frac{1 - \cos(st)}{t^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^\infty \left[\sum_{s \in T_n(\Omega)} P\big(T_n = s\big)\left(\frac{1 - \cos(st)}{t^2}\right)\right]\mathrm{d}t \\
&= \int_0^\infty E\left(\frac{1 - \cos(T_n t)}{t^2}\right)\mathrm{d}t = \int_0^\infty \frac{1 - E\big(\cos(T_n t)\big)}{t^2}\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Or $\cos(T_n t) = \cos(T_{n-1}t + a_n X_n t)$. et les variables $T_{n-1}t$ et $a_n X_n t$ sont indépendantes selon le lemme des coalitions avec $P(a_n X_n t = a_n t) = P(-a_n X_n t = a_n t) = \dfrac{1}{2}$, $P(a_n X_n t = -a_n t) = P(-a_n X_n t =$

$-a_n t) = \frac{1}{2}$ donc $a_n X_n t$ et $-a_n X_n t$ ont même loi. Selon la question [**II.A.2**], on a donc $E\big(\cos(T_n t)\big) = E\big(\cos(T_{n-1}t)\big)\,E\big(\cos(a_n X_n t)\big)$. Or $E\big(\cos(a_n X_n t)\big) = \frac{1}{2}\cos(a_n t) + \frac{1}{2}\cos(-a_n t) = \cos(a_n t)$ donc, par récurrence immédiate,

$$E\big(\cos(T_n t)\big) = \cos(a_1 t)\cos(a_2 t)\cdots\cos(a_n t) = \cos(t)\cos\left(\frac{t}{3}\right)\cdots\cos\left(\frac{t}{2n-1}\right)$$

ce qui donne $\frac{\pi}{2}\,E\big(|T_n|\big) = J_n$.
Les résultats du [**A**] donnent donc que $\underline{\big(J_n\big)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est croissante et convergente}}$.

III.B.2) $\diamond$ $\sum\limits_{k=2}^{7}\frac{1}{2k-1} = \frac{43024}{45045} \leqslant 1$ donc, selon [**1**] et [**A.3**], on a $J_7 = \frac{\pi}{2}E\big(|T_7|\big) = \frac{\pi}{2}E\big(|T_1|\big) = J_1 = \frac{\pi}{2}$ donc, par croissance de (J_n), $\underline{\forall n \in [\![1,7]\!],\ J_n = \frac{\pi}{2}}$.

$\diamond$ Selon [**A.1**],

$$E\big(|T_{n+1}|\big) - E\big(|T_n|\big) = \frac{1}{2}\sum_{x\in T_n(\Omega)}\Big[|x+a_{n+1}| + |x-a_{n+1}| - 2\,|x|\Big]\,P\big(T_n = x\big)$$

Or $|x+a_{n+1}|+|x-a_{n+1}|-2\,|x| = \begin{cases} (x+a_{n+1}) + (x-a_{n+1}) - 2x = 0 & \text{si } x \geqslant a_{n+1} \geqslant 0 \\ -(x+a_{n+1}) - (x-a_{n+1}) + 2x = 0 & \text{si } x \leqslant -a_{n+1} \leqslant 0 \\ (x+a_{n+1}) - (x-a_{n+1}) - 2|x| = 2(a_{n+1} - |x|) & \text{si } -a_{n+1} < x < a_{n+1} \end{cases}$

donc

$$E\big(|T_{n+1}|\big) - E\big(|T_n|\big) = \sum_{x\in T_n(\Omega)\cap]-a_{n+1},a_{n+1}[}\big[a_{n+1} - |x|\big]\,P\big(T_n = x\big).$$

Notons $\mathcal{V}_n$ l'ensemble $\mathcal{V}_n = T_n(\Omega)\cap]-a_{n+1},a_{n+1}[= \left\{\sum\limits_{i=1}^{n}\varepsilon_k a_k \;\middle|\; (\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n) \in \{-1,1\}^n\right\}\cap]-a_{n+1},a_{n+1}[$.
Pour $x \in T_n(\Omega)$, on a $P\big(T_n = x\big) > 0$. Plus précisément (*mais ceci ne sert pas*),

$$P\big(T_n = x\big) = \frac{1}{2^n}\,\mathrm{Card}\left\{(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n) \in \{-1,1\}^n \;\middle|\; x = \sum_{i=1}^{n}\varepsilon_k a_k\right\}.$$

Ce qui précède montre que $\mathcal{V}_n \neq \emptyset \Longrightarrow E\big(|T_{n+1}|\big) > E\big(|T_n|\big)$. Montrons donc que $\forall n \geqslant 7,\ \mathcal{V}_n \neq \emptyset$.
Soit $\alpha_n = \mathrm{Min}\big(T_n(\Omega)\cap[0,+\infty[\big)$ qui existe car $T_n(\Omega)\cap[0,+\infty[$ est un ensemble fini $(\mathrm{Card}\,(T_n(\Omega)) \leqslant 2^n)$ non vide (il contient $\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$). Montrons par récurrence sur n que $\alpha_n \leqslant \frac{1}{2(2n+1)}$ pour $\begin{cases} n \geqslant 8 & \text{si } n \text{ pair,} \\ n \geqslant 11 & \text{si } n \text{ impair.}\end{cases}$

→ *Initialisations:*

- $\beta_8 = -a_1 + \sum\limits_{k=2}^{8}a_k = \frac{982}{45045} \in T_8(\Omega)$ et $2\times 17\times\frac{982}{45045} = \frac{33388}{45045} < 1$ donc $\alpha_8 \leqslant \beta_8 \leqslant \frac{1}{2\times 17}$
- $\beta_{11} = a_1 - \sum\limits_{k=2}^{11}a_k + \frac{2}{11} = \frac{13729}{14549535} \in T_{11}(\Omega)$ et $2\times 23\times\frac{13729}{14549535} = \frac{631534}{14549535} < 1$ donc $\alpha_{11} \leqslant \beta_{11} \leqslant \frac{1}{2\times 23}$.

→ *Hérédité:*

Soit $(\mathcal{H}_n)$: $\alpha_n \leqslant \frac{1}{2(2n+1)}$, montrons $(\mathcal{H}_n) \Longrightarrow (\mathcal{H}_{n+2})$.
$\alpha_n \in T_n(\Omega)$ donc $\alpha_n - a_{n+1} + a_{n+2} = \alpha_n - \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+3} \in T_{n+2}(\Omega)$ et on a

$$0 \leqslant \alpha_n \leqslant \frac{1}{2(2n+1)} \Longrightarrow \frac{-2}{(2n+1)(2n+3)} \leqslant \alpha_n - a_{n+1} + a_{n+2} \leqslant \frac{2n-1}{2(2n+1)(2n+3)}$$

donc $\big|\alpha_n - a_{n+1} + a_{n+2}\big| \leqslant \mathrm{Max}\left(\frac{2}{(2n+1)(2n+3)}, \frac{2n-1}{2(2n+1)(2n+3)}\right) = \frac{2n-1}{2(2n+1)(2n+3)}$ car $2n-1 \geqslant 4$. Comme $-T_{n+2}(\Omega) = T_{n+2}(\Omega)$, $\beta_{n+2} = \big|\alpha_n - a_{n+1} + a_{n+2}\big| \in T_{n+2}(\Omega)$ donc $\alpha_{n+2} \leqslant \beta_{n+2}$.
Mais $\frac{1}{2(2n+5)} - \beta_{n+2} = \frac{4}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)} > 0$ d'où $(\mathcal{H}_{n+2})$.

Ceci donne $\alpha_n \in \mathcal{V}_n$ donc $\mathcal{V}_n \neq \emptyset$ pour $\begin{cases} n \geqslant 8 & \text{si } n \text{ pair,} \\ n \geqslant 11 & \text{si } n \text{ impair.} \end{cases}$

Il reste à traiter les cas où $n \in \{7, 9\}$:

- $\beta_7 = a_1 - \sum\limits_{k=2}^{7} a_k = \dfrac{2021}{45045} \in T_7(\Omega)$ et $15 \times \dfrac{2021}{45045} = \dfrac{2021}{3003} < 1$ donc $\beta_7 \in \mathcal{V}_7$;
- $\beta_9 = a_1 - \sum\limits_{k=2}^{8} a_k + a_9 = \dfrac{28351}{765765} \in T_9(\Omega)$ et $19 \times \dfrac{28351}{765765} = \dfrac{538669}{765765} < 1$ donc $\beta_9 \in \mathcal{V}_9$.

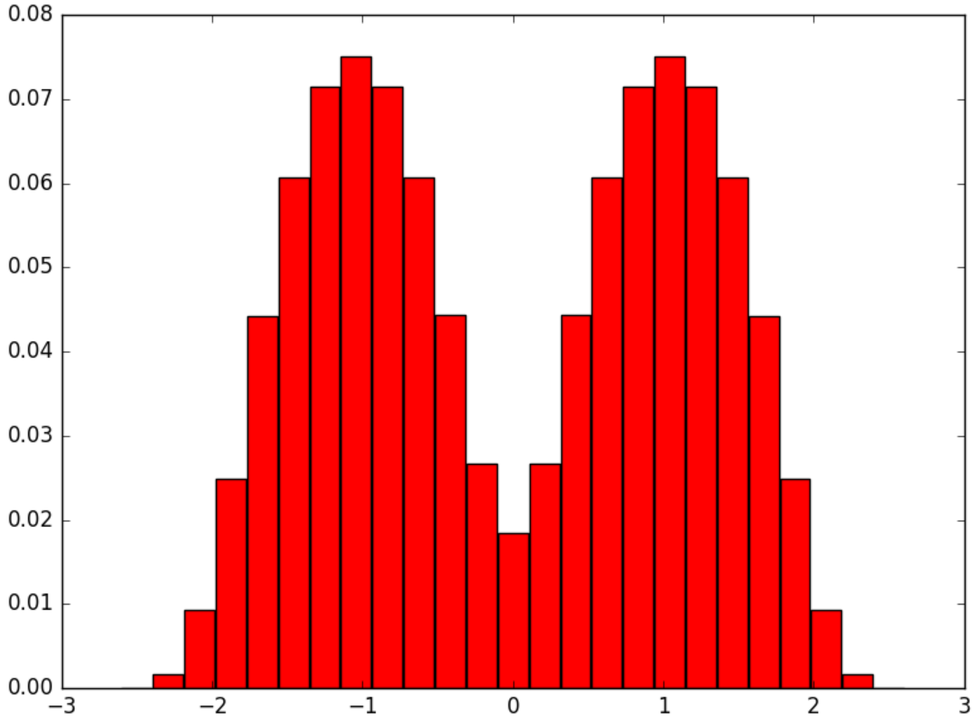
Ceci achève la démonstration: $\forall n \geqslant 7,\ \mathcal{V}_n \neq \emptyset$ donc la suite $\underline{\left(E\left(|T_n|\right)\right)_{n \geqslant 7} \text{ est strictement croissante}}$.

* * *
* *
*

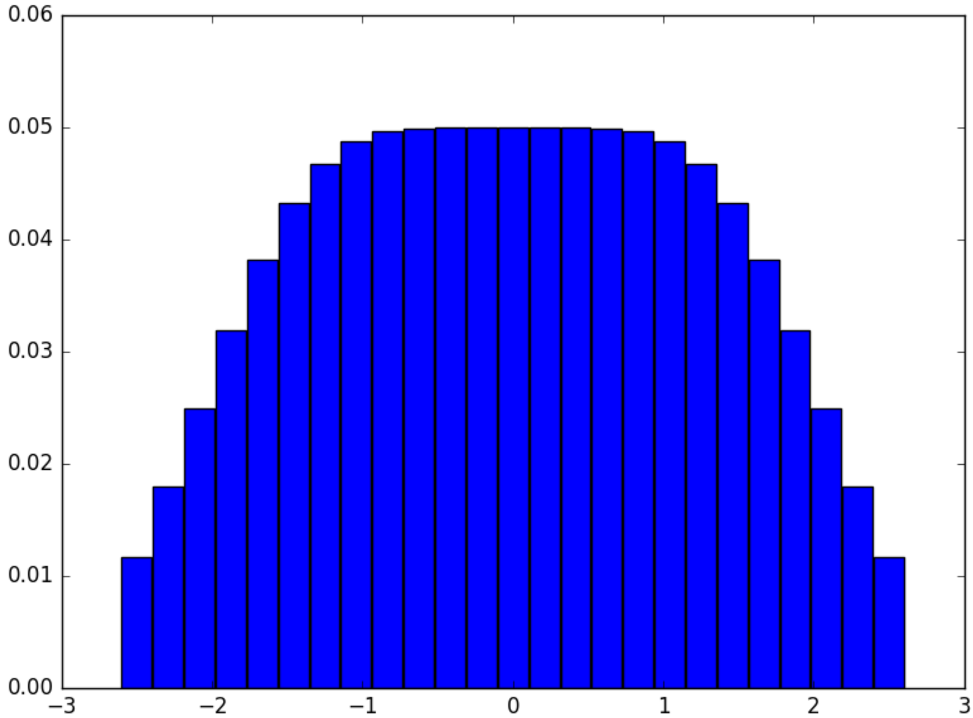
Annexes

Pour illustrer, un tableau des premières valeurs de $(2n+1)\alpha_n$ et $E\left(|S_n|\right)$ calculées par "force brute " en Python, l'histogramme de T_n pour $n = 23$ (soit 8388608 points) et, à titre de comparaison celui (toujours pour $n = 23$ et sur le même intervalle donc équeuté) de $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{X_k}{k}$.

n	$(2n+1)\alpha_n$	$E\left(\lvert S_n\rvert\right)$	$\sigma\left(S_n\right)$
1	3	1	1
2	3.333333333	1.000000000	1.054092553
3	3.266666667	1.000000000	1.072898463
4	2.914285714	1.000000000	1.082367440
5	2.339682540	1.000000000	1.088055584
6	1.583261183	1.000000000	1.091846792
7	0.672993673	1.000000000	1.094553140
8	0.370607171	1.000340632	1.096581516
9	0.703439045	1.000629875	1.098158107
10	0.001633867	1.000690845	1.099418624
11	0.021702893	1.000937343	1.100449401
12	0.036065548	1.001032926	1.101307970
13	0.058271985	1.001181429	1.102034139
14	0.024138050	1.001280076	1.102656332
15	0.000608269	1.001381393	1.103195380
16	0.009901949	1.001465147	1.103666902
17	0.002905477	1.001543349	1.104082833
18	0.002867351	1.001612301	1.104452457
19	0.000221392	1.001675264	1.104783096
20	0.000800759	1.001732091	1.105080609



Histogramme de T_{23}.



Histogramme de $\sum_{k=1}^{23} \frac{X_k}{k}$.