

CONCOURS COMMUN 2004
DES ECOLES DES MINES D'ALBI, ALES, DOUAI, NANTES
Epreuve Spécifique de Mathématiques
(filière MPSI)

CORRECTION

Premier problème

I. Résolution d'équations différentielles

1. Notons (E_0) l'équation proposée. La fonction $t \mapsto th\ t$ est continue sur $\mathbb{R}$. Donc, les solutions de (E_0) sur $\mathbb{R}$ sont de la forme λf_0 , $\lambda \in \mathbb{R}$, où f_0 est une solution non nulle de (E_0) sur $\mathbb{R}$.

Soit z une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} z \text{ solution de (E) sur } \mathbb{R} &\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, z'(t) + th(t)z(t) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, ch(t)z'(t) + sh(t)z(t) = 0 \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, (ch \cdot z)'(t) = 0 \\ &\Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{R} / \forall t \in \mathbb{R}, ch(t)z(t) = C \Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{R} / \forall t \in \mathbb{R}, z(t) = \frac{C}{ch\ t} \end{aligned}$$

Les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme $t \mapsto \frac{C}{ch\ t}$, $C \in \mathbb{R}$.

Maintenant, pour une telle fonction z , $z(0) = 1 \Leftrightarrow \frac{C}{1} = 1 \Leftrightarrow C = 1$. Par suite, il existe une et une seule solution z de (E) sur $\mathbb{R}$ vérifiant $z(0) = 1$, à savoir

$$\forall t \in \mathbb{R}, z_1(t) = \frac{1}{ch\ t}.$$

2. Notons (E) l'équation proposée. Les fonctions $t \mapsto th\ t$ et $t \mapsto t\ th\ t$ sont continues sur $\mathbb{R}$. Donc, les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont de la forme $\lambda z_1 + f_1$, $\lambda \in \mathbb{R}$, où f_1 est une solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

Déterminons une solution particulière de (E) par la méthode de variation de la constante. Il existe une solution particulière de (E) sur $\mathbb{R}$ de la forme $C \cdot z_1$ où C est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Puisque,

$$(Cz_1)' + th(t)(Cz_1) = C'z_1 + C(z_1' + th(t)z_1) = C'z_1,$$

on a

$$\begin{aligned} Cz_1 \text{ solution de (E) sur } \mathbb{R} &\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, C'(t)z_1(t) = t \cdot th\ t \\ &\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, C'(t) = t \cdot th\ t \cdot ch\ t \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, C'(t) = t \cdot sh\ t \end{aligned}$$

Une intégration par parties fournit alors

$$\int t sh\ t\ dt = t ch\ t - \int ch\ t\ dt = t ch\ t - sh\ t + \lambda.$$

On peut prendre pour tout réel t , $C(t) = t ch\ t - sh\ t$ et donc $C(t)z_1(t) = \frac{t ch\ t - sh\ t}{ch\ t} = t - th\ t$. Une solution particulière de (E) sur $\mathbb{R}$ est donc la fonction $t \mapsto t - th\ t$. Les solutions de (E) sont les fonctions de la forme

$$t \mapsto t - th\ t + \frac{C}{ch\ t}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Maintenant, pour une telle fonction z , $z(0) = 0 \Leftrightarrow 0 - 0 + \frac{C}{1} = 0 \Leftrightarrow C = 0$. Par suite, il existe une et une seule solution z de (E) sur $\mathbb{R}$ vérifiant $z(0) = 0$, à savoir

$$\forall t \in \mathbb{R}, z_2(t) = t - th\ t.$$

III. Etude d'intégrales et de suites

Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$. La fonction $t \mapsto \frac{1}{\operatorname{ch}^k t}$ est continue sur $[0, x]$ si $x \geq 0$ et sur $[x, 0]$ si $x < 0$. Donc $I_k(x)$ existe.

10. Soit $x \in \mathbb{R}$. En posant $u = e^t$ et donc $t = \ln u$ puis $dt = \frac{du}{u}$, on obtient

$$I_1(x) = \int_0^x \frac{1}{\operatorname{ch} t} dt = \int_0^x \frac{2}{e^t + e^{-t}} dt = \int_1^{e^x} \frac{2}{u + \frac{1}{u}} \frac{du}{u} = 2 \int_1^{e^x} \frac{1}{1 + u^2} du = 2(\operatorname{Arctan}(e^x) - \frac{\pi}{4}).$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, I_1(x) = 2 \operatorname{Arctan}(e^x) - \frac{\pi}{2}.$$

11. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$I_2(x) = \int_0^x \frac{1}{\operatorname{ch}^2 t} dt = [\operatorname{th} t]_0^x = \operatorname{th} x.$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, I_2(x) = \operatorname{th} x.$$

12. a) Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$. Les fonctions $t \mapsto \operatorname{sh} t$ et $t \mapsto \frac{1}{\operatorname{ch}^{k+1} t}$ sont de classe C^1 sur $[0, x]$ si $x \geq 0$ et sur $[x, 0]$ si $x < 0$. On peut donc effectuer une intégration par parties qui fournit :

$$\begin{aligned} I_k &= \int_0^x \frac{1}{\operatorname{ch}^k t} dt = \int_0^x \operatorname{ch} t \cdot \frac{1}{\operatorname{ch}^{k+1} t} dt = \left[\operatorname{sh} t \cdot \frac{1}{\operatorname{ch}^{k+1} t} \right]_0^x - \int_0^x \operatorname{sh} t \cdot \frac{-(k+1) \operatorname{sh} t}{\operatorname{ch}^{k+2} t} dt \\ &= \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^{k+1} x} + (k+1) \int_0^x \frac{\operatorname{sh}^2 t}{\operatorname{ch}^{k+2} t} dt = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^{k+1} x} + (k+1) \int_0^x \frac{\operatorname{ch}^2 t - 1}{\operatorname{ch}^{k+2} t} dt \\ &= \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^{k+1} x} + (k+1) \left(\int_0^x \frac{1}{\operatorname{ch}^k t} dt - \int_0^x \frac{1}{\operatorname{ch}^{k+2} t} dt \right) \\ &= \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^{k+1} x} + (k+1)(I_k - I_{k+2}). \end{aligned}$$

Par suite,

$$(k+1)I_{k+2} = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^{k+1} x} + kI_k.$$

On a montré que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, I_{k+2} = \frac{k}{k+1} I_k + \frac{1}{k+1} \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^{k+1} x}.$$

b)

$$I_3 = \frac{1}{2}I_1 + \frac{1}{2} \frac{\text{sh } x}{\text{ch}^2 x} = \frac{1}{2}(2 \text{Arctan}(e^x) - \frac{\pi}{2}) + \frac{1}{2} \frac{\text{sh } x}{\text{ch}^2 x} = \text{Arctan}(e^x) + \frac{\text{sh } x}{2 \text{ch}^2 x} - \frac{\pi}{4},$$

et

$$I_4 = \frac{2}{3}I_2 + \frac{1}{3} \frac{\text{sh } x}{\text{ch}^3 x} = \frac{2}{3} \text{th } x + \frac{1}{3} \frac{\text{sh } x}{\text{ch}^3 x}.$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, I_3(x) = \text{Arctan}(e^x) + \frac{\text{sh } x}{2 \text{ch}^2 x} - \frac{\pi}{4} \text{ et } I_4(x) = \frac{2}{3} \text{th } x + \frac{\text{sh } x}{3 \text{ch}^3 x}.$$

13. a) Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$. En posant $u = -t$, on obtient

$$I_k(-x) = \int_0^{-x} \frac{1}{\text{ch}^k t} dt = \int_0^x \frac{1}{\text{ch}^k(-u)} (-du) = - \int_0^x \frac{1}{\text{ch}^k u} du = -I_k(x).$$

Donc,

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, I_k \text{ est impaire.}$$

b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Puisque la fonction ch est continue sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \frac{1}{\text{ch}^k t}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$. On en déduit que la fonction I_k est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et en particulier est continue sur $\mathbb{R}$.

c) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. La fonction $t \mapsto \frac{1}{\text{ch}^k t}$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ en tant qu'inverse d'une fonction de classe C^∞ et ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}$. On en déduit que la fonction I_k est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

14. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Pour tout réel x , on a

$$I'_k(x) = \frac{1}{\text{ch}^k x}, \text{ puis } I''_k(x) = -\frac{k \text{sh } x}{\text{ch}^{k+1} x},$$

et enfin

$$I'''_k(x) = -k \left(\text{ch } x \frac{1}{\text{ch}^{k+1} x} + \text{sh } x \frac{-(k+1) \text{sh } x}{\text{ch}^{k+2} x} \right) = -k \frac{\text{ch}^2 x - (k+1) \text{sh}^2 x}{\text{ch}^{k+2} x}.$$

15. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. La fonction I_k est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et en particulier admet un développement limité d'ordre 3 en 0 fourni par la formule de TAYLOR-YOUNG.

$$\begin{aligned} I_k(x) &\underset{x \rightarrow 0}{=} I_k(0) + I'_k(0)x + \frac{I''_k(0)}{2}x^2 + \frac{I'''_k(0)}{6}x^3 + o(x^3) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} 0 + 1.x + 0.x^2 + \frac{-k}{6}x^3 + o(x^3) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{k}{6}x^3 + o(x^3). \end{aligned}$$

$$I_k(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{k}{6}x^3 + o(x^3).$$

16. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Pour tout réel x , $I'_k(x) = \frac{1}{\text{ch}^k x} > 0$. Donc la fonction I_k est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

17. a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. La fonction I_k est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et en particulier, pour tout entier naturel n , on a

$$u_{n+1} = I_k(n+1) > I_k(n) = u_n.$$

La suite (u_n) est strictement croissante.

b) Soit t un réel positif. Puisque $e^{-t} > 0$, $\frac{1}{\operatorname{ch} t} = \frac{2}{e^{-t} + e^t} \leq \frac{2}{e^t} = 2e^{-t}$.
Soit alors $k \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}$. Par croissance de l'intégrale, on a

$$I_k(n) = \int_0^n \left(\frac{1}{\operatorname{ch} t} \right)^k dt \leq \int_0^n (2e^{-t})^k dt = 2^k \int_0^n e^{-kt} dt = \frac{2^k}{k} (1 - e^{-nk}) \leq \frac{2^k}{k}.$$

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}, I_k(n) \leq \frac{2^k}{k}.$$

La suite (u_n) est ainsi croissante et majorée (par $\frac{2^k}{k}$). On en déduit que la suite (u_n) converge.

18. a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. La fonction I_k est croissante sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel positif x on a alors

$$I_k(x) \leq I_k(E(x) + 1) \leq \frac{2^k}{k}.$$

Ainsi, la fonction I_k est croissante sur $\mathbb{R}^+$ et majorée (par $\frac{2^k}{k}$). La fonction I_k a donc une limite réelle en $+\infty$ ou encore J_k existe dans $\mathbb{R}$.

$$b) J_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} I_1(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2 \operatorname{Arctan}(e^x) - \frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} \text{ et } J_2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} I_2(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\operatorname{th} x) = 1.$$

$$J_1 = \frac{\pi}{2} \text{ et } J_2 = 1.$$

c) Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

$$J_{k+2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} I_{k+2}(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{k}{k+1} I_k(x) + \frac{1}{k+1} \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^{k+1} x} \right) = \frac{k}{k+1} J_k,$$

(car $\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^{k+1} x} \sim \frac{e^x/2}{(e^x/2)^{k+1}} = \frac{1}{2^k} e^{-kx} \rightarrow 0$).

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, J_{k+2} = \frac{k}{k+1} J_k.$$

Détaillons davantage cette récurrence. Pour les entiers impairs, elle s'écrit

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, J_{2p+1} = \frac{2p-1}{2p} J_{2p-1}.$$

Donc pour tout entier naturel non nul p , on a

$$J_{2p+1} = \frac{2p-1}{2p} \frac{2p-3}{2p-2} \frac{2p-5}{2p-4} \cdots \frac{1}{2} J_1 = \frac{(2p)(2p-1)(2p-2)(2p-3) \dots 2.1}{((2p)(2p-2) \dots (2.2).(2.1))^2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2} \frac{\pi}{2}.$$

ce qui reste vrai quand $p = 0$.

$$\forall p \in \mathbb{N}, J_{2p+1} = \frac{(2p)!}{2^{2p} (p!)^2} \frac{\pi}{2}.$$

De même, pour les entiers pairs, la récurrence s'écrit

$$\forall p \geq 2, J_{2p} = \frac{2p-2}{2p-1} J_{2p-2}.$$

Donc pour tout entier naturel p supérieur ou égal à 2, on a

$$J_{2p} = \frac{2p-2}{2p-1} \frac{2p-4}{2p-3} \cdots \frac{2}{3} J_2 = \frac{((2p-2)(2p-4) \dots 4.2)^2}{(2p-1)(2p-2)(2p-3) \dots 3.2} \cdot 1 = \frac{(2^{p-1} (p-1)!)^2}{(2p-1)!},$$

ce qui reste vrai quand $p = 1$.

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, J_{2p} = \frac{2^{2p-2} ((p-1)!)^2}{(2p-1)!}.$$

FIN

