

CONCOURS COMMUN 2003

DES ÉCOLES DES MINES D'ALBI, ALÈS, DOUAI, NANTES

Épreuve spécifique de Mathématiques
(filière MPSI)

Jeudi 22 mai 2003 de 8h00 à 12h00

EXTRAIT

Second Problème

$\mathbb{R}$ désigne le corps des nombres réels et $\mathbb{C}$ le corps des nombres complexes.

$M_2(\mathbb{C})$ désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients dans $\mathbb{C}$.

On pose : $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $J = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $K = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}$ et $L = \begin{bmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}$.

I. Etude d'une symétrie

On notera bien, que dans toute cette partie, $M_2(\mathbb{C})$ est muni de sa structure de $\mathbb{C}$ -algèbre.

Pour $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ dans $M_2(\mathbb{C})$ on pose : $\sigma(A) = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ et $\tau(A) = a + d$.

- 11) a) Montrer que σ est une symétrie du $\mathbb{C}$ -espace vectoriel $M_2(\mathbb{C})$.
b) Etablir que (I, J, K, L) est une base du $\mathbb{C}$ -espace vectoriel $M_2(\mathbb{C})$ puis donner la matrice de l'endomorphisme σ dans cette base.
- 12) On considère A et B dans $M_2(\mathbb{C})$.
a) Montrer que : $\sigma(AB) = \sigma(B) \sigma(A)$.
b) Justifier l'égalité : $A\sigma(A) = \det(A) I$.
c) Montrer que si A est inversible alors $\sigma(A)$ l'est aussi.
Exprimer les matrices $\sigma(A)^{-1}$ et $\sigma(A^{-1})$ en fonction de A .

- 13) a) Vérifier que τ est une forme linéaire sur le $\mathbb{C}$ -espace vectoriel $M_2(\mathbb{C})$.
 b) Soit A dans $M_2(\mathbb{C})$. Exprimer $\sigma(A)$ à l'aide des matrices A , I et du complexe $\tau(A)$.

II. Une $\mathbb{R}$ -algèbre célèbre : l'algèbre des quaternions

On notera bien, que dans toute cette partie, $M_2(\mathbb{C})$ est muni de sa structure de $\mathbb{R}$ -algèbre.

A tout couple (z_1, z_2) de nombres complexes on associe la matrice $M(z_1, z_2) = \begin{bmatrix} z_1 & -\bar{z}_2 \\ z_2 & \bar{z}_1 \end{bmatrix}$.

On désigne par H l'ensemble des matrices de $M_2(\mathbb{C})$ de la forme $M(z_1, z_2)$, le couple (z_1, z_2) décrivant $\mathbb{C}^2$.

- 14) a) Montrer que toute matrice de H s'écrit de manière unique sous la forme $\alpha I + \beta J + \gamma K + \delta L$ où $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont des réels.
 b) En déduire que H est un sous espace vectoriel du $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $M_2(\mathbb{C})$.
 Préciser une base et la dimension du $\mathbb{R}$ -espace vectoriel H .
 c) Montrer que H est stable pour le produit matriciel.
 d) Montrer que H est une $\mathbb{R}$ -algèbre. La $\mathbb{R}$ -algèbre H est-elle commutative ?
- 15) a) Vérifier que : $\forall A \in H, \sigma(A) \in H$ et $\det(A) \in \mathbb{R}^+$.
 b) Montrer qu'une matrice non nulle de H est inversible et que son inverse est dans H .
 c) Vérifier que $(H \setminus \{0\}, \times)$ est un groupe.
- 16) Montrer que si deux entiers naturels peuvent tous deux s'écrire comme une somme de quatre carrés d'entiers naturels alors il en est de même de leur produit.
 On pourra exprimer $\det(M(z_1, z_2))$ comme une somme de quatre carrés de réels.

III. Un produit scalaire et une projection orthogonale

Pour A et B dans H on pose : $(A | B) = \frac{1}{4} \tau(A\sigma(B) + B\sigma(A))$.

- 17) On considère A et B dans H .
 a) Prouver que $(A | B) \in \mathbb{R}$. On pourra utiliser la question 5)a).
 b) Montrer que $(A | A) = \det(A)$.
 c) Etablir que $(\cdot | \cdot)$ est un produit scalaire sur le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel H .
- 18) Vérifier que (I, J, K, L) est une base orthonormale de H .
- 19) On pose $F = \{A \in H \mid \tau(A) = 0\}$.
 a) Montrer que F est un hyperplan du $\mathbb{R}$ -espace vectoriel H . En donner une base.
 b) Montrer que : $F^\perp = \{\alpha I, \alpha \in \mathbb{R}\}$.
 c) On désigne par π la projection orthogonale sur F .
 Montrer que : $\forall A \in H, \pi(A) = \frac{1}{2}(A - \sigma(A))$.

FIN

