

Épreuve Spécifique de Mathématiques
(filière MPSI)

Mardi 20 mai 2008 de 8h00 à 12h00

EXTRAIT

Deuxième problème

Etude d'une fonction

- 21.** Etudier sur $]0, +\infty[$ la fonction $f : x \mapsto x^{\frac{1}{x}}$. On précisera le domaine de définition, les limites aux bornes, les extrema et asymptotes éventuels.
- 22.** Montrer que l'on peut prolonger par continuité f en 0. Ce prolongement sera encore noté f . Préciser la valeur de f en 0.
- 23.** La fonction f est-elle dérivable en 0 ?
- 24.** Montrer que f est une bijection de $]0, e]$ sur $]0, e^{1/e}]$.
- 25.** La fonction réciproque de f est-elle continue, dérivable sur $]0, e^{1/e}]$?

Etude d'une suite

Soit x un réel fixé strictement positif. On pose $\Phi_x(t) = x^t$, et on définit la suite $(t_n)_n$ de la manière suivante

$$t_0 = 1, \quad t_{n+1} = \Phi_x(t_n) \text{ pour } n \in \mathbb{N}.$$

Lorsque la suite $(t_n)_n$ est convergente on note $h(x)$ sa limite dans $\mathbb{R}$.

- 26.** Si $x = 1$, que peut-on dire sur la convergence de la suite $(t_n)_n$?
- 27.** Justifier que si $h(x)$ existe (c'est-à-dire la suite $(t_n)_n$ est convergente) alors $h(x) = \Phi_x(h(x))$, en déduire dans ce cas que $f(h(x)) = x$.

On va traiter le cas $x \geq 1$:

- 28.** Montrer que pour $x \in]1, +\infty[$, la fonction $\Phi_x : t \mapsto x^t$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- 29.** Soit $x > 1$, montrer par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, t_n < t_{n+1}$.
- 30.** On suppose que $x \in]1, e^{1/e}]$, montrer par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, t_n \leq e$. En déduire que dans ce cas la suite $(t_n)_n$ est convergente.
- 31.** On suppose $x > e^{1/e}$, et on veut montrer que la suite $(t_n)_n$ a pour limite $+\infty$. On pourra supposer que la suite est convergente vers $h(x)$ et en utilisant les questions **27.** et **21.** aboutir à une contradiction. Conclure.

On va étudier le cas $x \in]0, 1[$:

- 32.** Montrer que pour $x \in]0, 1[$, la fonction $\Phi_x : t \mapsto x^t$ est décroissante sur $\mathbb{R}$. Que peut-on en déduire sur la monotonie de $\Phi_x \circ \Phi_x$ sur $\mathbb{R}$?

33. Pour $0 < x < 1$, montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, t_{2n+1} < t_{2n}$.

34. On suppose que $0 < x < 1$. Montrer par récurrence que la suite extraite $(t_{2n})_n$ est décroissante, puis que la suite extraite $(t_{2n+1})_n$ est croissante.

35. En déduire qu'elles sont toutes les deux convergentes, et que leur limite ne peut être qu'un point fixe de $\Phi_x \circ \Phi_x$ dans $[0, 1]$, c'est-à-dire une solution de $(\Phi_x \circ \Phi_x)(t) = t$ dans $[0, 1]$.

Détermination des points fixes

La suite du problème consiste à déterminer l'ensemble des points fixes de $\Phi_x \circ \Phi_x$ dans $[0, 1]$. Pour cela on pose $g(t) = (\Phi_x \circ \Phi_x)(t) - t$, on admettra le résultat suivant :

$$g'(t) = \Phi'_x(t) \cdot (\Phi'_x \circ \Phi_x)(t) - 1 = (\ln x)^2 \cdot \Phi_x(t) \cdot (\Phi_x \circ \Phi_x)(t) - 1$$

36. Dans le cas $x \in [\frac{1}{e}, 1[$ on admet que l'on obtient le tableau suivant :

t	0	1
$g'(t)$	$(\ln x)^2 x - 1$	$(\ln x)^2 x^{x+1} - 1$
$g(t)$	x	$x^x - 1$

Préciser le signe de $g'(0)$. Quelle est la monotonie de g sur $[0, 1]$? Montrer que $\Phi_x \circ \Phi_x$ n'a qu'un seul point fixe dans $[0, 1]$. Conclusion pour la convergence de la suite $(t_n)_n$.

37. Dans le cas $x \in]0, \frac{1}{e}[$ on admet que l'on a le tableau suivant :

t	0	α	1
$g'(t)$	$(\ln x)^2 x - 1$	β	$(\ln x)^2 x^{x+1} - 1$
$g(t)$	x		$x^x - 1$

où α est l'unique racine de g'' sur $]0, 1[$ et $\beta = g'(\alpha) = -e^{-1} \ln x - 1$. Préciser le signe de β lorsque $x \in [e^{-e}, \frac{1}{e}[$. Que peut-on en déduire sur la convergence de la suite $(t_n)_n$ lorsque $x \in [e^{-e}, \frac{1}{e}[$?

38. On suppose à partir de maintenant et jusqu'à la fin que $x \in]0, e^{-e}[$. Et on admet que le tableau de variation est de la forme suivante :

t	0	γ	α	δ	1
$g'(t)$	$(\ln x)^2 x - 1 < 0$	0	$\beta > 0$	0	$(\ln x)^2 x^{x+1} - 1 < 0$
$g(t)$	x	$g(\gamma)$	$g(\alpha)$	$g(\delta)$	$x^x - 1$

avec $\gamma < \alpha < \delta$ et $g'(\gamma) = g'(\delta) = 0$. On admet aussi que Φ_x possède un unique point fixe dans $]0, \frac{1}{e}[$ que l'on note p , donc $\Phi_x(p) = p$. Montrer que $g'(p) = (\ln p)^2 - 1$ et en déduire le signe de $g'(p)$. En déduire que $\Phi_x \circ \Phi_x$ possède trois points fixes p_1, p, p_2 vérifiant $0 < p_1 < \gamma < p < \delta < p_2 < 1$.

39. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $p_2 \leq t_{2n}$, et que la suite $(t_{2n})_n$ est convergente vers p_2 .

40. On veut montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a $t_{2n+1} \leq p$. Pour cela, on supposera qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $p < t_{2n_0+1}$ et on aboutira à une contradiction. Que peut-on conclure sur la convergence de $(t_{2n+1})_n$? La suite $(t_n)_n$ est-elle convergente?

FIN

