L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats de la filière MP, comporte 4 pages.
L'usage de tout matériel électronique, y compris la calculatrice, est interdit

Les candidats sont informés que la qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements constitueront des éléments importants pour l'appréciation des copies. Il convient en particulier de rappeler avec précision les références des questions abordées.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Le sujet de cette épreuve est composé d'un exercice et de deux problèmes indépendants entre eux.

Durée : 4 heures

Exercice

Calcul de la somme de la série de Riemann $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$

1. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\int_0^\pi \left(\frac{x^2}{2\pi} - x\right)\cos(kx)dx = \frac{1}{k^2}$.
2. Soit $x \in]0, \pi]$.
   a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $e^{ix}\frac{1-e^{inx}}{1-e^{ix}} = \frac{\sin(\frac{nx}{2})}{\sin(\frac{x}{2})}e^{i\frac{(n+1)x}{2}}$.
   b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum\limits_{k=1}^{n} \cos(kx) = \frac{\sin(\frac{nx}{2})\cos\frac{(n+1)x}{2}}{\sin(\frac{x}{2})}$.
3. Soit ψ une fonction réelle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$. Montrer à l'aide d'une integration par parties que $\lim\limits_{m\to+\infty} \int_0^\pi \psi(x)\sin(mx)dx = 0$.
4. Soit g la fonction réelle définie sur $[0, \pi]$ par $\begin{cases} g(x) = \dfrac{\frac{x^2}{2\pi} - x}{2\sin(\frac{x}{2})} & \text{si } x \in]0, \pi] \\ g(0) = -1 \end{cases}$.

   Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$.
5. a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} + \int_0^\pi g(x)\sin(\frac{(2n+1)}{2}x)dx$.
   b) Justifier la convergence de la série $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ et montrer que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.
6. Pour tout réel $x > 0$, on pose $\varphi(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n(1+2nx)}$.
   a) Montrer que pour tout réel $x > 0$, $\varphi(x)$ est bien définie.
   b) Justifier l'existence de la limite, quand x tend vers $+\infty$, de $\varphi(x)$ et déterminer sa valeur.

Problème 1

On désigne par $\mathbb{R}^+$ l'ensemble des réels positifs et par $\mathbb{R}^{*+}$ l'ensemble des réels strictement positifs. Dans tout le problème, on note $\mathscr{L}$ l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, continues, telles que, pour tout entier $n > 0$, pour tout réel $x > 0$, la fonction $t \mapsto f(t)e^{-nxt}$ soit intégrable sur $\mathbb{R}^+$. Pour tout entier $n > 0$ et pour tout f dans $\mathscr{L}$, on note $\mathcal{N}_n(f)$, la fonction définie sur $\mathbb{R}^{*+}$ par:

$$\forall x \in \mathbb{R}^{*+}, \mathcal{N}_n(f)(x) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-nxt}dt$$

Soit k un entier naturel non nul et soit f une fonction k fois dérivable sur $\mathbb{R}^+$, on note $f^{(0)} = f$ et $f^{(k)} = (f^{(k-1)})'$ désigne la dérivée $k^{\text{ème}}$ de f. Dans toute la suite, n désigne un entier naturel non nul.

Partie I
Exemples

1. Soit α un réel positif, on considère la fonction $\varphi_\alpha : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, telle que pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $\varphi_\alpha(t) = e^{-\alpha t}$. Démontrer que φ_α est un élément de $\mathscr{L}$ et déterminer $\mathcal{N}_n(\varphi_\alpha)$.
2. Soit ω un réel positif, on considère les deux fonctions C et S, telles que pour tout réel t positif, $C(t) = \cos(\omega t)$ et $S(t) = \sin(\omega t)$.
   a) Démontrer que C est un élément de $\mathscr{L}$ et déterminer $\mathcal{N}_n(C)$.
   b) Démontrer que S est un élément de $\mathscr{L}$ et déterminer $\mathcal{N}_n(S)$.

Partie II
Comportements asymptotiques

Dans cette partie, f désigne un élément de $\mathscr{L}$.

1. On suppose que f est une fonction bornée sur $\mathbb{R}^+$.
   a) Déterminer la limite de $\mathcal{N}_n(f)(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
   b) Montrer que, si de plus f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ et f' est bornée sur $\mathbb{R}^+$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} x\mathcal{N}_n(f)(x) = \frac{f(0)}{n}$.
2. On suppose que $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = \ell$ où ℓ est un réel.
   a) Montrer que f est une fonction bornée sur $\mathbb{R}^+$.
   b) i) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^{*+}$, $x\mathcal{N}_n(f)(x) = \int_0^{+\infty} f(\frac{t}{x})e^{-nt}dt$.
      ii) En déduire $\lim\limits_{x \to 0+} x\mathcal{N}_n(f)(x)$.
3. On suppose que f est integrable sur $\mathbb{R}^+$ et on considère la suite $(g_n)_{n>0}$ définie comme suit: $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $g_n = N_n(f)(\frac{1}{n+1})$. Déterminer la limite de la suite $(g_n)_{n>0}$.

Partie III
Quelques propriétés de $\mathcal{N}_n$

1. Soient f un élément de $\mathscr{L}$ et m un entier naturel, on considère la fonction g_m définie sur $\mathbb{R}^+$ par $\forall t \in \mathbb{R}^+$, $g_m(t) = t^m f(t)$.
   a) Pour $x > 0$, justifier qu'il existe $B > 0$ tel que pour tout $t \geq B$, $t^m e^{-nxt} \leq e^{-\frac{nxt}{2}}$.
   b) En déduire que g_m est un élément de $\mathscr{L}$.
2. a) Démontrer que pour tout élément f de $\mathscr{L}$, la fonction $\mathcal{N}_n(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{*+}$ et que l'on a $(\mathcal{N}_n(f))' = -n\mathcal{N}_n(g_1)$ où g_1 est la fonction définie dans la Partie III question 1.
   b) Plus généralement, démontrer que pour tout élément f de $\mathscr{L}$, la fonction $\mathcal{N}_n(f)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{*+}$ et déterminer pour tout $k \in \mathbb{N}$ $(\mathcal{N}_n(f))^{(k)}$ en fonction de $\mathcal{N}_n(g_k)$, où g_k est la fonction définie dans la Partie III question 1.
3. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et bornée sur $\mathbb{R}^+$ telle que f' soit dans $\mathscr{L}$.
   a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^{*+}$,
   $$\mathcal{N}_n(f')(x) = nx\mathcal{N}_n(f)(x) - f(0)$$
   b) Montrer que si de plus, f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^+$ et f' est bornée sur $\mathbb{R}^+$ et f'' est un élément de $\mathscr{L}$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}^{*+}$,
   $$\mathcal{N}_n(f'')(x) = (nx)^2\mathcal{N}_n(f)(x) - nxf(0) - f'(0)$$
4. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, si f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathbb{R}^+$ et pour tout $j \in \mathbb{N}$, $0 \leq j \leq k-1$, $f^{(j)}$ est bornée sur $\mathbb{R}^+$ et $f^{(k)}$ est un élément de $\mathscr{L}$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}^{*+}$,
$$\mathcal{N}_n(f^{(k)})(x) = (nx)^k\mathcal{N}_n(f)(x) - \sum_{i=1}^{k}(nx)^{i-1}f^{(k-i)}(0)$$

Partie IV
Injectivité de $\mathcal{N}_n$

1. Soit h une fonction réelle continue sur $[0,1]$ telle que, pour tout $m \in \mathbb{N}$, $\int_0^1 t^m h(t)dt = 0$.
   a) Montrer que pour tout polynôme P à coefficients réels, $\int_0^1 P(t)h(t)dt = 0$.
   b) En déduire que h est la fonction nulle.
2. Soit f un élément de $\mathscr{L}$, on pose pour tout $t \geq 0$, $h_n(t) = \int_0^t e^{-nu} f(u)du$.
   a) Montrer que pour tout entier $k > 0$, $\mathcal{N}_n(f)(1+k) = nk\mathcal{N}_n(h_n)(k)$.
   b) On suppose que pour tout entier $k > 0$, $\mathcal{N}_n(f)(1+k) = 0$.
      i) Montrer que pour tout entier $k \geq 0$, $\int_0^1 u^k h_n(-\frac{\ln u}{n})du$ converge et vaut 0.
      ii) En déduire que h_n est la fonction nulle.
3. Montrer que l'application $\mathcal{N}_n$ définie sur $\mathscr{L}$ est injective.

Partie V
Application au calcul de l'intégrale de Dirichlet

Soit w un réel strictement positif, on considère la fonction g définie par $g(0) = w$ et pour tout $t > 0$, $g(t) = \frac{\sin wt}{t}$ et soit G la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $G(x) = \int_0^x g(t)dt$.

1. Montrer que G admet une limite réelle ℓ en $+\infty$.
2. a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^{*+}$, $\mathcal{N}_n(g)(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan((\frac{n}{w})x)$, (vous pouvez utiliser les questions de la Partie III, 2. a) et de la Partie II, 1. a).
   b) i) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^{*+}$, $\mathcal{N}_n(g)(x) = nx\mathcal{N}_n(G)(x)$.
      ii) En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin wt}{t}dt$.

Partie VI
Application à la résolution des équations différentielles

Soit m un entier naturel non nul, on considère l'équation différentielle linéaire d'ordre m, à coefficients constants :

$$(E) \qquad a_0 y^{(m)} + a_1 y^{(m-1)} + \ldots + a_m y = f(t),$$

avec les conditions initiales: $y(0) = y_0$, $y'(0) = y_1$, ..., $y^{(m-1)}(0) = y_{m-1}$,
avec $(a_0, a_1, \ldots, a_m) \in \mathbb{R}^{m+1}$, $a_0 \neq 0$, $(y_0, y_1, \ldots, y_{m-1}) \in \mathbb{R}^m$ et $f \in \mathscr{L}$. On voudrait trouver la solution $y = y(t)$ pour $t \geq 0$ de (E).

1. Montrer que si y est une solution de (E) alors y vérifie une équation algébrique de la forme: $\mathcal{N}_n(y)(x) = \frac{\psi_{n,m-1}(x)}{\varphi_{n,m}(x)} + \frac{\mathcal{N}_n(f)(x)}{\varphi_{n,m}(x)}$, où $\varphi_{n,m}$ est un polynôme à coefficients réels de degré m et $\psi_{n,m-1}$ est un polynôme à coefficients réels de degré inférieur ou égal à $m-1$.
2. Résoudre, en utilisant $\mathcal{N}_1$, l'équation différentielle $y'' + 3y' + 2y = 2e^{\frac{-3}{2}t}$, avec les conditions initiales suivantes: $y(0) = 1$ et $y'(0) = 2$.
3. Résoudre, en utilisant $\mathcal{N}_2$, l'équation différentielle $y''+4y'+3y = \sin t$, avec les conditions initiales suivantes: $y(0) = 1$ et $y'(0) = -3$.
4. Résoudre le système différentiel suivant: $(S) \quad \begin{cases} y_1' + y_2' - y_1 + y_2 = -4e^{-3t} \\ y_1' + 2y_2' + 3y_1 + y_2 = 5\cos t \\ y_1(0) = 2, y_2(0) = 0 \end{cases}$

Problème 2

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé, on appelle fonction génératrice d'une variable aléatoire réelle X à valeurs dans $\mathbb{N}$, lorsqu'elle existe, la fonction G_X définie par: $G_X(t) = E(t^X) = \sum_{k=0}^{+\infty} t^k P(X = k)$.

Partie I
Quelques propriétés de la fonction génératrice et quelques exemples

1. Montrer que la fonction génératrice G_X est au moins définie sur l'intervalle [-1,1].

2. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $G_X^{(k)}(0) = k!P(X = k)$.
3. Donner l'expression de G_X, en précisant le domaine de définition, dans chaque cas suivant:
   a) X suit la loi de Bernoulli de paramètre p, notée $\mathcal{B}(p)$, où $p \in [0, 1]$.
   b) X suit la loi binomiale de paramètre n, p, notée $\mathcal{B}(n, p)$, où $n \in \mathbb{N}^*, p \in [0, 1]$.
   c) X suit la loi géométrique de paramètre p, notée $G(p)$, où $p \in]0, 1[$.
4. Montrer que la variable aléatoire X admet une espérance si, et seulement si, G_X est dérivable en 1 et dans ce cas $G'_X(1) = E(X)$.
5. Montrer que la variable aléatoire X admet un moment d'ordre 2 si, et seulement si, G_X est deux fois dérivable en 1 et dans ce cas $V(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - (G'_X(1))^2$.
6. En déduire l'espérance et la variance d'une variable aléatoire qui suit la loi géométrique $G(p)$ de paramètre p, où $p \in]0, 1[$.

Partie II

La fonction génératrice d'une somme de variables aléatoires

Soient n un entier naturel non nul et N une variable aléatoire telle que $N(\Omega) = [\![1, n]\!] = \{1, \dots, n\}$. On suppose que pour tout k de $[\![1, n]\!]$, $P(N = k)$ est non nul. On considère n variables aléatoires indépendantes $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$, toutes de même loi qu'une variable aléatoire X, telle que $X(\Omega) = [\![1, m]\!]$, avec m un entier naturel non nul. On pose $S = \sum\limits_{i=1}^{N} X_i$, (en particulier, sachant que l'événement $(N = h)$ est réalisé, $h \in [\![1, n]\!]$, alors $S = \sum\limits_{i=1}^{h} X_i$).

1. Montrer que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $G_{X_1 + \ldots + X_k} = G_X^k$.
2. a) Soit Y une variable aléatoire réelle qui prend un nombre fini de valeurs dans $Y(\Omega)$, montrer que $E(Y) = \sum\limits_{k=1}^{n} P(N = k)E(Y|[N = k])$, où $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $E(Y|[N = k]) = \sum\limits_{y \in Y(\Omega)} yP\left((Y = y)|[N = k]\right)$ désigne l'espérance de Y sachant l'événement $[N = k]$ et $P\left((Y = y)|[N = k]\right)$ désigne la probabilité de $(Y = y)$ sachant l'événement $[N = k]$.
   b) Montrer que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ et pour tout réel t, $E(t^S|[N = k]) = G_X^k(t)$.
   c) En déduire que pour tout réel t, $G_S(t) = \sum\limits_{k=1}^{n} P(N = k)G_X^k(t)$.
   d) Montrer que $G_S = G_N \circ G_X$.
3. En déduire que $E(S) = E(N)E(X)$.

Partie III

Application

On dispose d'un jeton non truqué à deux faces numérotées 1 et 2 et d'un dé tétraédrique (famille des pyramides composés de quatre faces triangulaires), équilibré, dont les faces sont numérotées de 1 à 4. On lance le jeton et on note N le numéro obtenu, puis on lance N fois le dé et pour chaque lancer, on note le numéro de la face d'appui du dé. Soit S la somme des numéros obtenus lors de ces N lancers, (si $N = 1$, le dé est lancé une seule fois et S est le numéro lu sur la face d'appui du dé).

1. a) Déterminer la loi de N.
   b) Donner la loi conditionnelle de S sachant $[N = k]$, pour $k = 1$, puis pour $k = 2$.
   c) En déduire la loi de S, puis son espérance et sa variance.
2. a) Identifier la variable aléatoire X telle que $S = \sum\limits_{i=1}^{N} X_i$, où X_1 et X_2 sont deux variables aléatoires indépendantes de même loi que X.
   b) Déterminer les fonctions génératrices G_N et G_X et en déduire la fonction génératrice G_S.
   c) Retrouver, en utilisant la fonction génératrice G_S, la loi, l'espérance et la variance de S.

FIN DE L'ÉPREUVE