A 2012 MATH. II MP

ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
SUPAÉRO (ISAE), ENSTA PARISTECH,
TÉLÉCOM PARISTECH, MINES PARISTECH,
MINES DE SAINT-ÉTIENNE, MINES DE NANCY,
TÉLÉCOM BRETAGNE, ENSAE PARISTECH (FILIÈRE MP),
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (FILIÈRE TSI).

CONCOURS 2012

DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Filière MP

(Durée de l'épreuve : 4 heures)
L'usage d'ordinateur ou de calculette est interdit.

Sujet mis à la disposition des concours :
CYCLE INTERNATIONAL, ENSTIM, TELECOM INT, TPE-EIVP.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente
sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES II - MP.

L'énoncé de cette épreuve comporte 5 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'objectif de ce problème est d'établir sous quelles conditions la formule sommatoire de Poisson est vraie et d'en étudier certaines applications.

Les fonctions considérées dans ce problème sont toutes définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$. On note $\mathscr{L}$ l'espace vectoriel des fonctions continues par morceaux et intégrables sur $\mathbb{R}$, et $\mathscr{L}^*$ l'espace vectoriel des fonctions continues f telles qu'il existe $\alpha > 1$ pour lequel la fonction $x \mapsto |x|^\alpha f(x)$ est bornée sur $\mathbb{R}$.

A. Préliminaires

La *transformée de Fourier* de $f \in \mathscr{L}$ est la fonction $\hat{f}$ définie par la formule :

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-2i\pi x\xi}\, \mathrm{d}x.$$

1) Justifier que pour tout $f \in \mathscr{L}$, $\hat{f}$ est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.

On désigne par $\mathscr{W}$ l'ensemble des fonctions $f \in \mathscr{L}$ telles que $\hat{f} \in \mathscr{L}$, et par $\mathscr{W}^*$ l'ensemble des fonctions $f \in \mathscr{L}^*$ telles que $\hat{f} \in \mathscr{L}^*$.

2) Établir que $\mathscr{W}$ et $\mathscr{W}^*$ sont des espaces vectoriels sur $\mathbb{C}$, vérifiant l'inclusion $\mathscr{W}^* \subset \mathscr{W}$.

Étant donné $f \in \mathscr{L}$, $\alpha > 0$ et $y, \nu \in \mathbb{R}$, on pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_\alpha(x) = f(\alpha x)$ et $f_{y,\nu}(x) = f(x+y)e^{-2i\pi\nu x}$.

3) Déterminer les transformées de Fourier de f_α et $f_{y,\nu}$ en fonction de $\hat{f}$. Que peut-on en déduire sur les espaces $\mathscr{W}$ et $\mathscr{W}^*$?

4) Calculer les transformées de Fourier des fonctions s et t définies sur $\mathbb{R}$ par les formules

$$s(x) = \begin{cases} 1 & \text{pour } |x| \leqslant \frac{1}{2}\,; \\ 0 & \text{ailleurs,} \end{cases}$$

et

$$t(x) = \begin{cases} 1 - |x| & \text{pour } |x| < 1\,; \\ 0 & \text{ailleurs,} \end{cases}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.

5) Montrer que $\mathscr{W}^*$ et $\mathscr{W}$ sont distincts de $\mathscr{L}$. On pourra pour cela s'aider de la fonction s définie à la question précédente.

6) Si f_n est une suite de fonctions de $\mathscr{W}$ convergeant en moyenne vers une fonction $f \in \mathscr{W}$, montrer que la suite $\hat{f}_n$ converge vers $\hat{f}$, uniformément sur $\mathbb{R}$.

B. Formule sommatoire de Poisson

Soit $f \in \mathscr{L}^*$. Sa *périodisée* $\tilde{f}$ est définie par la formule $\tilde{f}(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n)$.

7) Montrer que $\tilde{f}$ est bien définie, 1-périodique et continue sur $\mathbb{R}$.

8) Déterminer, en fonction de $\hat{f}$, les coefficients de Fourier de $\tilde{f}$ définis pour tout $n \in \mathbb{Z}$ par la formule

$$c_n(\tilde{f}) = \int_0^1 \tilde{f}(x)\, e^{-2i\pi nx}\,\mathrm{d}x.$$

On rappelle que si deux fonctions continues périodiques ont les mêmes coefficients de Fourier, alors elles sont égales.

9) Montrer que si $\hat{f} \in \mathscr{L}^*$, alors $\tilde{f}$ est égale à la somme de sa série de Fourier. En déduire, pour tout $f \in \mathscr{W}^*$, la *formule de Poisson* :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n).$$

Les parties suivantes donnent diverses applications de la formule de Poisson.

C. Application à la formule d'inversion de Fourier

Soit $f \in \mathscr{W}^*$.

10) En appliquant la formule de Poisson à la fonction $f_{x,\xi}$ définie dans la partie A, établir la généralisation suivante, pour tous réels x et ξ :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n)\, e^{-2i\pi n\xi} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n+\xi)\, e^{2i\pi x(n+\xi)}.$$

Montrer que cette formule donne un développement en série de Fourier de la fonction périodisée $\widetilde{F_x}$, où F_x est la fonction définie par $F_x(\xi) = \hat{f}(\xi)e^{2i\pi x\xi}$.

11) En déduire la *formule d'inversion de Fourier* :

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi)\, e^{2i\pi x\xi}\,\mathrm{d}\xi.$$

On pourra pour cela interpréter le second membre comme un coefficient de Fourier particulier de $\widetilde{F_x}$.

On dit que $\lambda \in \mathbb{C}$ est *valeur propre* de la transformation de Fourier dans $\mathscr{W}^*$ s'il existe $f \in \mathscr{W}^*$ non nulle telle que $\hat{f} = \lambda f$.

12) Montrer qu'une telle valeur propre est une racine quatrième de l'unité, puis déterminer toutes les valeurs propres *réelles* de la transformation de Fourier dans $\mathscr{W}^*$. On pourra s'aider de combinaisons linéaires des fonctions t et $\hat{t}$ où t est définie à la question 4).

Les parties suivantes sont indépendantes les unes des autres.

D. Application au théorème d'échantillonnage de Whittaker

On considère, dans cette partie, une fonction $f \in \mathscr{W}^*$ telle que $\hat{f}$ s'annule en dehors de l'intervalle $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

13) Montrer qu'alors f est déterminée de façon unique par la donnée de la suite des *échantillons* $\big(f(n)\big)_{n\in\mathbb{Z}}$. (On pourra s'aider de la formule généralisée de Poisson établie à la question 10).)

14) Ce résultat subsiste-t-il si l'on suppose seulement que $\hat{f}$ s'annule en dehors d'un intervalle $[-\frac{1}{2}-\varepsilon, \frac{1}{2}+\varepsilon]$ où $\varepsilon > 0$? (On pourra considérer la fonction $\xi \mapsto t(\frac{\xi-\frac{1}{2}}{\varepsilon}) - t(\frac{\xi+\frac{1}{2}}{\varepsilon})$, où t est la fonction définie à la question 4).)

E. Contre-exemple de Katznelson

Dans cette partie, on considère la fonction t définie à la question 4) et l'on pose, pour tous $x \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$ et N entier > 0 :

$$u_k(x) = t(2^k x) - t(2^{k+1} x)$$

$$u_{k,N}(x) = \frac{1}{N} \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z},\\ |n|<N}} \left(1 - \frac{|n|}{N}\right) u_k(x-n).$$

On pose enfin, pour une suite donnée $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'entiers strictement positifs :

$$f = \sum_{k=0}^{+\infty} u_{k,N_k}.$$

On pourra utiliser, sans les re-démontrer, les égalités suivantes concernant le *noyau de Fejér* K_N :

$$K_N(x) = \sum_{|n|<N} \left(1 - \frac{|n|}{N}\right) e^{2i\pi nx} = \frac{1}{N}\left(\frac{\sin \pi N x}{\sin \pi x}\right)^2$$

la deuxième égalité n'ayant lieu que si $x \notin \mathbb{Z}$.

15) Montrer que la fonction f est bien définie (on pourra distinguer les cas $x \in \mathbb{Z}$ et $x \notin \mathbb{Z}$). La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$?

Bien que ce ne soit pas nécessaire, pour la conformité au programme, on pourra admettre dorénavant que f est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.

16) Montrer que f est intégrable et que la série de terme général u_{k,N_k} converge vers f en moyenne sur $\mathbb{R}$. Que peut-on en déduire sur la série de terme général $\widehat{u_{k,N_k}}$?

17) Etablir l'inégalité suivante :

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{u_{k,N}}(\xi)|\,\mathrm{d}\xi \leqslant \frac{1}{N} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \sup_{[n,n+1]} |\hat{u}_k|.$$

18) En déduire qu'il existe une suite $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que $\hat{f}$ soit intégrable et que la série de terme général $\widehat{u_{k,N_k}}$ converge vers $\hat{f}$ en moyenne sur $\mathbb{R}$. Que peut-on en déduire sur la nature de la convergence de la série de terme général u_{k,N_k} ?

19) Examiner la validité de la formule de Poisson pour cette fonction f. Que peut-on en conclure ?

F. Application à la resommation d'Ewald

On note g la fonction gaussienne définie sur $\mathbb{R}$ par la formule $g(x) = e^{-\pi x^2}$, et l'on admet que $\hat{g} = g$.

20) Donner une valeur approchée de la somme de la série :

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi\left(\frac{n}{100}\right)^2}$$

exacte à 10^{-10000} près.

FIN DU PROBLÈME