

CONCOURS COMMUN 2004
DES ECOLES DES MINES D'ALBI, ALES, DOUAI, NANTES
Epreuve Spécifique de Mathématiques
(filière MPSI)

CORRECTION

Deuxième problème

I. Etude de structures

1. a) $E = \{aE_{1,1} + bE_{2,2} + cE_{1,2}, (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\} = \text{Vect}(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,2})$. Donc, E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
b) D'après a), la famille $(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,2})$ est une famille génératrice de E . D'autre part, la famille $(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,2})$ est libre en tant que sous-famille de la famille libre $(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ (qui est la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$). Ainsi

une base de E est $(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,2})$ et $\dim(E) = 3$.

2. a) Soient $(a, b, c, a', b', c') \in \mathbb{R}^6$.

$$\begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & c' \\ 0 & b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' & ac' + cb' \\ 0 & bb' \end{pmatrix} \in E.$$

Ainsi, le produit de deux éléments de E est encore un élément de E et

E est stable pour la multiplication des matrices.

- b) $E \neq \emptyset$ car $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in E$.

Puisque $(E, +, \cdot)$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$, $(E, +)$ est en particulier un sous-groupe de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +)$ et on a : $\forall (M, N) \in E^2, M - N \in E$.

Puisque E est stable pour le produit matriciel, on a $\forall (M, N) \in E^2, M \times N \in E$.

En résumé,

- $I_2 \in E$;
- $\forall (M, N) \in E^2, M - N \in E$;
- $\forall (M, N) \in E^2, M \times N \in E$.

On en déduit que

E est un sous-anneau de l'anneau $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \times)$.

- c) $E_{1,1}$ et $E_{1,2}$ sont dans E . $E_{1,2}E_{1,1} = 0$ et $E_{1,1}E_{1,2} = E_{1,2} \neq 0$. Donc $E_{1,1}E_{1,2} \neq E_{1,2}E_{1,1}$ et E n'est pas commutatif.

3. Vérifions que G est un sous-groupe de $(\mathcal{GL}_2(\mathbb{R}), \times)$.

- $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$ et donc $G \neq \emptyset$.
- Soit $(a, b, c) \in]0, +\infty[\times]0, +\infty[\times \mathbb{R}$. Alors

$$\det \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix} = ab > 0,$$

et en particulier $\det \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix} \neq 0$. Donc tout élément de G est dans $\mathcal{GL}_2(\mathbb{R})$ ou encore $G \subset \mathcal{GL}_2(\mathbb{R})$.

- Soit $(a, b, c, a', b', c') \in]0, +\infty[\times]0, +\infty[\times \mathbb{R} \times]0, +\infty[\times]0, +\infty[\times \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & c' \\ 0 & b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' & ac' + cb' \\ 0 & bb' \end{pmatrix} \in G \text{ car } aa' > 0 \text{ et } bb' > 0.$$

- Soit $(a, b, c) \in]0, +\infty[\times]0, +\infty[\times \mathbb{R}$. On sait que

$$\begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ab} \begin{pmatrix} b & -c \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & \frac{-c}{b} \\ 0 & \frac{1}{b} \end{pmatrix} \in G \text{ car } \frac{1}{a} > 0 \text{ et } \frac{1}{b} > 0.$$

Finalement, G est un sous-groupe de $(\mathcal{GL}_2(\mathbb{R}), \times)$ et en particulier,

G est un groupe multiplicatif.

II. Puissances d'une matrice et suites

4. a) Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $a \neq b$ puis $A = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix}$. Montrons par récurrence que

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, A^p = \begin{pmatrix} a^p & c \frac{a^p - b^p}{a - b} \\ 0 & b^p \end{pmatrix}.$$

- Pour $p = 1$, $\begin{pmatrix} a^p & c \frac{a^p - b^p}{a - b} \\ 0 & b^p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix} = A^1$. La formule proposée est donc vraie pour $p = 1$.
- Soit $p \in \mathbb{N}$. Supposons que $A^p = \begin{pmatrix} a^p & c \frac{a^p - b^p}{a - b} \\ 0 & b^p \end{pmatrix}$. Alors

$$\begin{aligned} A^{p+1} &= A \times A \\ &= \begin{pmatrix} a^p & c \frac{a^p - b^p}{a - b} \\ 0 & b^p \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{p+1} & ca^p + bc \frac{a^p - b^p}{a - b} \\ 0 & b^{p+1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^{p+1} & c \frac{a^p(a - b) + b(a^p - b^p)}{a - b} \\ 0 & b^{p+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{p+1} & c \frac{a^{p+1} - b^{p+1}}{a - b} \\ 0 & b^{p+1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On a montré par récurrence que

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \forall (a, b, c) \in \mathbb{R}^3, a \neq b \Rightarrow \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix}^p = \begin{pmatrix} a^p & c \frac{a^p - b^p}{a - b} \\ 0 & b^p \end{pmatrix}.$$

b) Soit $(a, c) \in \mathbb{R}^2$ puis $A = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & a \end{pmatrix}$. On a donc $A = aI_2 + cE_{1,2}$. On note que $E_{1,2}^2 = 0$ et donc que pour $k \geq 2$, $E_{1,2}^k = 0$. Mais alors, puisque les matrices aI_2 et $cE_{1,2}$ commutent, la formule du binôme de NEWTON permet d'écrire pour $p \in \mathbb{N}^*$

$$A^p = (aI_2 + cE_{1,2})^p = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} (aI_2)^{p-k} (cE_{1,2})^k = a^p I_2 + pa^{p-1} cE_{1,2}.$$

On a montré que

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \forall (a, c) \in \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & a \end{pmatrix}^p = \begin{pmatrix} a^p & pa^{p-1}c \\ 0 & a^p \end{pmatrix}.$$

5. a) Inégalité de TAYLOR-LAGRANGE.

Soient n un entier naturel, I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction de classe C^{n+1} sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$). Si il existe un réel M tel que pour tout réel t de I , $|f^{(n+1)}(t)| \leq M$, alors

$$\forall (a, b) \in I^2, \left| f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b - a)^k \right| \leq \frac{M|b - a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

b) Soient n un entier naturel non nul et x un réel. Soit I l'intervalle $[0, x]$ si $x \geq 0$ et $[x, 0]$ si $x < 0$. Pour $t \in I$, posons $f(t) = e^t$. f est de classe C^{n+1} sur I et pour tout réel t de I , on a

$$|f^{(n+1)}(t)| = e^t \leq e^{|x|},$$

car si $x \geq 0$, $t \in I \Rightarrow t \leq x = |x|$ et si $x < 0$, $t \in I \Rightarrow t \leq 0 \Rightarrow t \leq -x = |x|$.

Appliquons alors l'inégalité de TAYLOR-LAGRANGE avec $a = 0$ et $b = x$. Puisque pour tout entier naturel k , on a $f^{(k)}(0) = e^0 = 1$, on obtient

$$\left| e^x - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \right| \leq e^{|x|} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Les théorèmes de croissances comparées permettent d'affirmer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$ (comparaison d'une suite géométrique et d'une factorielle) et on a donc montré que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_n(x) = e^x.$$

c) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $a \neq b$. D'après 4.a), on a

$$B_n = \sum_{p=0}^n \frac{1}{p!} \begin{pmatrix} a^p & c \frac{a^p - b^p}{a - b} \\ 0 & \frac{b^p}{p!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{p=0}^n \frac{a^p}{p!} & \frac{c}{a-b} \left(\sum_{p=0}^n \frac{a^p}{p!} - \sum_{p=0}^n \frac{b^p}{p!} \right) \\ 0 & \sum_{p=0}^n \frac{b^p}{p!} \end{pmatrix}.$$

Ainsi,

$$\alpha_n = \varphi_n(a), \beta_n = \varphi_n(b) \text{ et } \gamma_n = c \frac{\varphi_n(a) - \varphi_n(b)}{a - b}.$$

La question b) permet d'affirmer que les suites (α_n) , (β_n) et (γ_n) convergent et que ces suites ont pour limites respectives

$$\alpha = e^a, \beta = e^b \text{ et } \gamma = c \frac{e^a - e^b}{a - b}.$$

d) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a, c) \in \mathbb{R}^2$. D'après 4.b), on a

$$\begin{aligned} B_n &= \sum_{p=0}^n \frac{1}{p!} \begin{pmatrix} a^p & c p a^{p-1} \\ 0 & a^p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{p=0}^n \frac{a^p}{p!} & c \sum_{p=0}^n \frac{p a^{p-1}}{p!} \\ 0 & \sum_{p=0}^n \frac{a^p}{p!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{p=0}^n \frac{a^p}{p!} & c \sum_{p=1}^n \frac{a^{p-1}}{(p-1)!} \\ 0 & \sum_{p=0}^n \frac{a^p}{p!} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{p=0}^n \frac{a^p}{p!} & c \sum_{p=0}^{n-1} \frac{a^p}{p!} \\ 0 & \sum_{p=0}^n \frac{a^p}{p!} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\alpha_n = \varphi_n(a) \text{ et } \gamma_n = c \varphi_{n-1}(a).$$

La question b) permet d'affirmer que les suites (α_n) et (γ_n) convergent et que ces suites ont pour limites respectives

$$\alpha = e^a \text{ et } \gamma = c e^a.$$

6. a) D'après 5.b), l'image par f de la matrice nulle 0_2 est $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$. En particulier, $f(0_2) \neq 0_2$ et donc

$$f \text{ n'est pas linéaire.}$$

b) Soient $(a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2) \in \mathbb{R}^6$ puis $A_1 = \begin{pmatrix} a_1 & c_1 \\ 0 & b_1 \end{pmatrix}$ et $A_2 = \begin{pmatrix} a_2 & c_2 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix}$ tels que $f(A_1) = f(A_2)$.

On a déjà dans tous les cas $e^{a_1} = e^{a_2}$ et $e^{b_1} = e^{b_2}$ ce qui fournit $a_1 = a_2$ et $b_1 = b_2$.

Maintenant

- si de plus $a_1 \neq b_1$ alors $a_2 \neq b_2$ et l'égalité $f(A_1) = f(A_2)$ impose $c_1 \frac{e^{a_1} - e^{b_1}}{a_1 - b_1} = c_2 \frac{e^{a_2} - e^{b_2}}{a_2 - b_2}$ et finalement $c_1 = c_2$ car $\frac{e^{a_1} - e^{b_1}}{a_1 - b_1} = \frac{e^{a_2} - e^{b_2}}{a_2 - b_2} \neq 0$.
- si par contre $a_1 = b_1$ alors $a_2 = b_2$ et l'égalité $f(A_1) = f(A_2)$ impose $c_1 e^{a_1} = c_2 e^{a_2}$ et finalement $c_1 = c_2$ car $e^{a_1} = e^{a_2} \neq 0$.

On a montré que

$$\forall (A_1, A_2) \in E^2, (f(A_1) = f(A_2)) \Rightarrow A_1 = A_2$$

et donc que

f est injective.

c) Pour tout élément A de E , les coefficients diagonaux de $f(A)$ sont des réels strictement positifs. Donc par exemple, la matrice nulle (qui est un élément de E) n'a pas d'antécédent par f dans E .

f n'est pas surjective.

d) D'après ce qui précède, on a $f(E) \subset G$. Montrons que l'on a aussi $G \subset f(E)$.

Soit A' un élément quelconque de G . Posons $A' = \begin{pmatrix} a' & c' \\ 0 & b' \end{pmatrix}$ où a' , b' et c' sont trois réels tels que $a' > 0$ et $b' > 0$.

- si $a' \neq b'$, posons $a = \ln a'$, $b = \ln b'$ et $c = c' \frac{\ln a' - \ln b'}{a' - b'}$ puis $A = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix}$. Alors $a \neq b$ et

$$f(A) = \begin{pmatrix} e^a & c \frac{e^a - e^b}{a - b} \\ 0 & e^b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' & c' \frac{\ln a' - \ln b'}{a' - b'} \frac{a' - b'}{\ln a' - \ln b'} \\ 0 & b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' & c' \\ 0 & b' \end{pmatrix} = A'.$$

Dans ce premier cas, on a trouvé un élément A de E tel que $f(A) = A'$.

- si $a' = b'$, posons $a = \ln a'$ et $c = \frac{c'}{a'}$ puis $A = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & a \end{pmatrix}$. Alors

$$f(A) = \begin{pmatrix} e^a & c e^a \\ 0 & e^a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' & c' \\ 0 & a' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' & \frac{c'}{a'} a' \\ 0 & a' \end{pmatrix} = A'.$$

Dans ce deuxième cas, on a aussi trouvé un élément A de E tel que $f(A) = A'$.

On a montré que $\forall A' \in G, \exists A \in E / f(A) = A'$ et donc que $G \subset f(E)$. Finalement

f(E) = G.

7. a) **Premier cas.** Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $a \neq b$. On a déjà $A' - I = \begin{pmatrix} e^a - 1 & c \frac{e^a - e^b}{a - b} \\ 0 & e^b - 1 \end{pmatrix}$. Comme $a \neq b$, on a $e^a - 1 \neq e^b - 1$ et d'après la question 4.a)

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, (A' - I)^p = \begin{pmatrix} (e^a - 1)^p & c \frac{(e^a - 1)^p - (e^b - 1)^p}{e^a - e^b} \\ 0 & (e^b - 1)^p \end{pmatrix}.$$

Mais alors,

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^*, a_n &= \sum_{p=1}^n \frac{(-1)^{p-1}}{p} (e^a - 1)^p, \quad b_n = \sum_{p=1}^n \frac{(-1)^{p-1}}{p} (e^b - 1)^p \\ &\text{et} \\ c_n &= \frac{c}{a - b} \left(\sum_{p=1}^n \frac{(-1)^{p-1}}{p} (e^a - 1)^p - \sum_{p=1}^n \frac{(-1)^{p-1}}{p} (e^b - 1)^p \right). \end{aligned}$$

Deuxième cas. Soit $(a, c) \in \mathbb{R}^2$. On a déjà $A' - I = \begin{pmatrix} e^a - 1 & ce^a \\ 0 & e^a - 1 \end{pmatrix}$. D'après la question 4.b)

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, (A' - I)^p = \begin{pmatrix} (e^a - 1)^p & ce^a p(e^a - 1)^{p-1} \\ 0 & (e^a - 1)^p \end{pmatrix}.$$

Mais alors,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = \sum_{p=1}^n \frac{(-1)^{p-1}}{p} (e^a - 1)^p, \text{ et } c_n = ce^a \sum_{p=1}^n (-1)^{p-1} (e^a - 1)^{p-1}.$$

b) Soient n un entier naturel non nul et x un réel de $]0, 1[$. Soit I l'intervalle $[0, x]$. Pour $t \in I$, posons $f(t) = \ln(1 + t)$. f est de classe C^{n+1} sur I . On a déjà

$$\forall t \in I, f'(t) = \frac{1}{1+t}.$$

Mais alors, on obtient facilement par récurrence :

$$\forall k \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket, \forall t \in I, f^{(k)}(t) = (f')^{(k-1)}(t) = \frac{(-1)^{k-1} (k-1)!}{(1+t)^k}.$$

En particulier, pour tout réel t de I , on a

$$|f^{(n+1)}(t)| = \left| \frac{(-1)^n (n)!}{(1+t)^{n+1}} \right| = \frac{n!}{(1+t)^{n+1}} \leq n!.$$

D'autre part, $f(0) = 0$ et pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$\frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \frac{(-1)^{k-1} (k-1)!}{k!} = \frac{(-1)^{k-1}}{k}.$$

Appliquons alors l'inégalité de TAYLOR-LAGRANGE avec $a = 0$, $b = x$ et $M = n!$. On obtient

$$\left| \ln(1+x) - \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} \right| \leq n! \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{x^{n+1}}{n+1} \leq \frac{1}{n+1}.$$

Quand n tend vers $+\infty$, $\frac{1}{n+1}$ tend vers 0 et on a donc montré que

$$\forall x \in]0, 1[, \lim_{n \rightarrow +\infty} \psi_n(x) = \ln(1+x).$$

c) Puisque $0 < a < \ln 2$ et $0 < b < \ln 2$ on a $0 < e^a - 1 < 1$ et $0 < e^b - 1 < 1$. On peut donc appliquer ce qui précède au réel $x = e^a - 1$ ou au réel $x = e^b - 1$. Dans tous les cas, on a pour tout entier naturel non nul n , $a_n = \psi_n(e^a - 1)$ et $b_n = \psi_n(e^b - 1)$. Les deux suites (a_n) et (b_n) convergent respectivement vers $\ln(1 + (e^a - 1)) = a$ et $\ln(1 + (e^b - 1)) = b$.

Ensuite, si $a \neq b$, pour tout entier naturel non nul n on a $c_n = \frac{c}{a-b} (\psi_n(a) - \psi_n(b))$. Dans ce cas, la suite (c_n) converge vers

$$\frac{c}{a-b} (\ln(1 + (e^a - 1)) - \ln(1 + (e^b - 1))) = \frac{c}{a-b} (a - b) = c.$$

Mais si $a = b$, pour tout entier naturel non nul n on a

$$\begin{aligned} c_n &= ce^a \sum_{p=1}^n (-1)^{p-1} (e^a - 1)^{p-1} = ce^a \sum_{p=0}^{n-1} (1 - e^a)^p \\ &= ce^a \frac{1 - (1 - e^a)^n}{1 - (1 - e^a)} \quad (a > 0 \Rightarrow e^a > 1 \Rightarrow 1 - e^a \neq 0) \\ &= c(1 - (1 - e^a)^n) \end{aligned}$$

Maintenant $0 < a < \ln 2 \Rightarrow -1 < 1 - e^a < 0$ et donc la suite (c_n) converge vers c .
Finalement dans tous les cas,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a, \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = b \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = c.$$

FIN

