Sous-espaces affines d'un espace vectoriel

$(E, +, \cdot)$ sera un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

1) Structure affine d'un espace vectoriel

Soient $A, B \in E$.

Notation :

$(B - A)$ se notera $\overrightarrow{AB}$.

NB :

1) A, B et $\overrightarrow{AB} \in E$.
2) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u} \;\Leftrightarrow\; B = A + \overrightarrow{u}$
   où A, B et $\overrightarrow{u} \in E$.
3) A et B sont dits points de E.
   $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont dits vecteurs de E.

2) Translation $t_{\overrightarrow{u}}$

Définition 1 :

Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur de E.
La translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ est l'application $t_{\overrightarrow{u}}$ définie par

$$t_{\overrightarrow{u}} : \left| \begin{array}{ccl} E & \to & E \\ A & \mapsto & t_{\overrightarrow{u}}(A) = A + \overrightarrow{u} \in E \end{array} \right.$$

NB :

$t_{\overrightarrow{u}}(A) = B \;\Leftrightarrow\; \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u} \;\Leftrightarrow\; B = A + \overrightarrow{u}$

Proposition 2 :

1) $t_{\overrightarrow{0}} = id_E$
2) $t_{\overrightarrow{u}} \circ t_{\overrightarrow{v}} = t_{\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}} = t_{\overrightarrow{v}} \circ t_{\overrightarrow{u}}$
3) $t_{\overrightarrow{u}}$ est bijective et $(t_{\overrightarrow{u}})^{-1} = t_{\overrightarrow{-u}}$

NB :

1) $t_{\overrightarrow{u}}(0) = 0 \;\Leftrightarrow\; \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$
2) $t_{\overrightarrow{u}}$ n'est linéaire que si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$.

3) Sous-espace affine d'un espace vectoriel

Notation :

Soient $A \in E$ et F un sous-espace vectoriel de E.
$A + F = \{A + \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{u} \in F\}$

Définition 1 :

Soit $\mathcal{F} \subset E$. $\mathcal{F}$ est dit sous-espace affine de E si et seulement s'il est de la forme

$$\mathcal{F} = A + F$$

où $A \in E$ et F un sous-espace vectoriel de E.

Vocabulaire :

1) $\mathcal{F}$ s'appelle le sous-espace affine de E passant par A et dirigé par F.

2) Le sev F s'appelle la direction du s-espace affine $\mathcal{F}$.

NB 1 :

1) On montre que si $A, B \in E$ et F et G deux sev de E alors

$$A + F = B + G \;\Rightarrow\; F = G$$

2) D'où l'unicité de la direction d'un sous-espace affine.

NB 2 :

Tout sous-espace vectoriel de E est aussi un sous-espace affine de E.
C'est le sous-espace affine de E passant par 0 et dirigé par lui-même.

Proposition 2 : (Intersection de deux sous-espaces affines)

Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux sous-espaces affines de E de directions respectives F et G.
L'intersection $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ est soit vide soit un sous-espace affine de direction $F \cap G$.

Démo en bref :

Supposons que $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \neq \emptyset$, et soit $A \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$.

On a $\begin{cases} \mathcal{F} = A + F \\ \mathcal{G} = A + G \end{cases}$. Montrons que $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} = A + F \cap G$.

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G} &\Leftrightarrow M \in \mathcal{F} \text{ et } M \in \mathcal{G} \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \in F \text{ et } \overrightarrow{AM} \in G \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \in F \cap G \\ &\Leftrightarrow M \in (A + F \cap G) \end{aligned}$$

Exemples classiques de sous-espaces affines :

1) Considérons l'équation différentielle

$$(E) : y' = ay + b$$

et son équation homogène

$$(H) : y' = ay$$

où $a, b \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
S_H la droite vectorielle des solutions homogènes de (H) ; engendrée par $x \mapsto e^{A(x)}$, où A un primitive de a.
Si y_0 est une solution particulière de (E), alors l'ensemble des solutions de (E) est

$$S_E = y_0 + S_H$$

qui est le sous-affine de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ passant par y_0 et dirigé par S_H.
C'est en fait une droite affine.

2) Considérons maintenant l'équation différentielle

$$(E) : y" + ay' + by = c$$

et son équation homogène

$$(H) : y" + ay' + by = 0$$

où $a, b, c \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
S_H le plan vectoriel des solutions homogènes de (H).
Si y_0 est une solution particulière de (E), alors l'ensemble des solutions de (E) est

$$S_E = y_0 + S_H$$

qui est le sous-espace affine de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ passant par y_0 et dirigé par S_H.
C'est un plan affine.

3) Soit Σ un système linéaire d'écriture matricielle $AX = b$; où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $b \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})$.
Si X_0 est une solution particulière de Σ, alors l'ensemble des solutions de ce dernier est

$$S_\Sigma = X_0 + ker(A)$$

C'est le sous-espace affine de $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})$ passant par X_0 et dirigé par $ker(A)$.

4) Equation de la forme $u(x) = b$; où $u \in \mathcal{L}(E, F)$

Proposition :

Soient $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $b \in F$.
L'ensemble des solutions de l'équation

$$u(x) = b \ , \ x \in E$$

est soit vide soit un sous-espace affine de E de direction ker(u).

Démo en bref :

Notons S l'ensemble des solutions .

1) Cas 1 : Si $b \notin Im(u)$
$S = \emptyset$.

2) Cas 2 : Si $b \in Im(u)$
Soit $x_0 \in E$ tel que $u(x_0) = b$. On a

$$\begin{aligned} x \in S &\Leftrightarrow u(x) = b \\ &\Leftrightarrow u(x) = u(x_0) \\ &\Leftrightarrow (x - x_0) \in ker(u) \\ &\Leftrightarrow x \in x_0 + ker(u) \end{aligned}$$

D'où $S = x_0 + ker(u)$, qui est le sous-espace affine de E passant par x_0 et dirigé par ker(u).

Exemple 1 :

(Equation différentielle linéaire de premier ordre avec second membre).

5) Repère affine - Coordonnées

Définition 1 :
Un repère affine de E est tout couple **(O,B)** où $O \in E$ et B une base de E.
Vocabulaire : O s'appelle son origine.
Proposition et définition 2 :
Soient $\mathcal{R} = (O, B)$ un repère affine de E et $M \in E$.
Notons $B = (e_1, \cdots, e_n)$.

1) $\exists!(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{K}^n, \ \overrightarrow{OM} = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$

2) $(x_1, \cdots, x_n)$ s'appelle la famille des coordonnées de M dans le repère $\mathcal{R}$.

NB :

1) On écrit $M(x_1, \cdots, x_n)$.

2) $M(x_1, \cdots, x_n) \ \Leftrightarrow \ M = O + \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$

3) $O(0, \cdots, 0)$.

6) Hyperplans affines

Définition 1 :
Un hyperplan affine de E est un sous-espace affine de direction un hyperplan vectoriel.
Proposition 2 :
Soit $\mathcal{R} = (O, B)$ un repère affine de E.

1) Tout hyperplan affine $\mathcal{F}$ possède une équation cartésienne de forme
$$\mathcal{F} \ : \ a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = b$$
où $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^n | \{0\}$ et $b \in \mathbb{K}$.

2) Réciproquement, toute équation de la forme ci-dessus représente un hyperplan affine.

Par exemple :

1) Dans $\mathbb{R}^2$, les hyperplans affines sont les droites affines de la forme
$$(D) \ : \ ax + by + c = 0$$
où $(a, b) \in \mathbb{R}^2 | \{(0, 0)\}$ *et* $c \in \mathbb{R}$

2) Dans $\mathbb{R}^3$, les hyperplans affines sont les plans affines de la forme
$$(P) \ : \ ax + by + cz + d = 0$$
où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 | \{(0, 0, 0)\}$ *et* $d \in \mathbb{R}$