On considère la fonction $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, *cette fonction est clairement de classe* C^∞ *sur* $\mathbb{R}$.

1. *Montrer par récurrence qu'il existe un polynôme* $P_n(X)$ *tel que,*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1+x^2)^{n+1}}$$

   et que

$$P_{n+1}(x) = \left(1+x^2\right) P_n'(x) - 2(n+1)\, x\, P_n(x)$$

2. *En dérivant* f, *on constate que* $\forall x \in \mathbb{R}$, $\left(1+x^2\right) f'(x) + 2x f(x) = 0$. *En utilisant la formule de Leibniz sur cette égalité que l'on dérivera* n *fois, établir que*

$$P_{n+1}(x) + 2(n+1)\, x\, P_n(x) + n(n+1)\left(1+x^2\right) P_{n-1}(x) = 0$$

   En déduire que

$$P_n'(x) = -n(n+1)\ P_{n-1}(x)$$