

INTÉGRATION SUR UN SEGMENT

Résumé

I) Fonctions en escaliers - Fonctions continues par morceaux (CPM)

1) Subdivision d'un segment

NB : $[a, b]$ sera un segment de $\mathbb{R}$. ($a < b$)

Définition 1 :

On appelle **subdivision** de $[a, b]$ tout $(x_0, \dots, x_n) \in [a, b]^{n+1}$ avec

$$x_0 = a < \dots < x_n = b$$

n étant dans $\mathbb{N}$.

Vocabulaire :

- 1) Le **pas** de la subdivision : c'est $\max_{0 \leq k \leq n-1} (x_{k+1} - x_k)$
- 2) Le **support** de la subdivision : c'est $\{x_k \mid 0 \leq k \leq n\}$
- 3) Si $(x_{k+1} - x_k)_{0 \leq k \leq n-1}$ est constante, on dit que la subdivision est **à pas constant** ou **régulière**.

$$\text{On a ainsi : } \begin{cases} \forall 0 \leq k \leq n-1, x_{k+1} - x_k = \frac{b-a}{n} \\ \forall 0 \leq k \leq n, x_k = a + k \frac{b-a}{n} \end{cases}$$

Définition 2 : (subdivision plus fine)

Soient σ et σ' deux subdivisions de $[a, b]$ de supports respectifs S_σ et $S_{\sigma'}$.

On dit que σ est **plus fine** que σ' si et seulement si $S_\sigma \supset S_{\sigma'}$.

Définition 3 : (Réunion de deux subdivisions)

La **réunion** des deux subdivisions σ et σ' de $[a, b]$, qu'on note $\sigma \cup \sigma'$, est la subdivision de $[a, b]$ dont le support est la réunion des deux supports.

Proposition 4 :

Si σ et σ' sont deux subdivisions de $[a, b]$, alors leur réunion est une subdivision plus fine que σ et σ' .

2) Fonctions en escaliers

Définition 1 :

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

- 1) f est dite **en escaliers** sur $[a, b]$ si et seulement s'il existe une subdivision $x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b$ de $[a, b]$ telle que f soit constante sur chaque intervalle ouvert $]x_k, x_{k+1}[$.
- 2) Cette subdivision est dite **subdivision adaptée** à la fonction en escaliers f .

Définition 2 :

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{K}$, où I un intervalle de $\mathbb{R}$.

f est dite en escaliers sur I si et seulement si elle est en escaliers sur tout segment de I .

Exemple : La fonction partie entière est en escaliers sur $\mathbb{R}$.

Notation : $\mathcal{E}(I, \mathbb{K})$: L'ensemble des fonctions en escaliers sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Proposition 3 :

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ en escaliers sur $[a, b]$.

- 1) $|f|$ est aussi en escalier sur $[a, b]$.
- 2) f est bornée sur $[a, b]$.
- 3) Si σ est une subdivision adaptée à f , alors toute subdivision plus fine est aussi adaptée à f .
- 4) La combinaison linéaire de deux fonctions en escaliers sur $[a, b]$ est une fonction en escaliers.
- 5) $\mathcal{E}([a, b], \mathbb{K})$ est un espace vectoriel.

3) Fonctions continues par morceaux

Définition 1 :

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

f est dite **continue par morceaux** sur $[a, b]$ si et seulement s'il existe une subdivision $x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b$ de $[a, b]$ telle que les deux conditions suivantes soient satisfaites :

- 1) f est continue sur chaque $]x_k, x_{k+1}[$.
- 2) La restriction de f à chaque $]x_k, x_{k+1}[$ est prolongeable par continuité en x_k et x_{k+1} .
C-à-d en chaque x_k , f admet une limite à gauche et une limite à droite finies.

Vocabulaire : Cette subdivision est dite **adaptée** à f .

Définition 2 :

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{K}$, où I un intervalle de $\mathbb{R}$.

f est dite en continue par morceaux sur I si et seulement si elle est continue par morceaux sur tout segment de I .

Notation : $\mathcal{C}_{pm}(I, \mathbb{K})$: L'ensemble des fonctions continues par morceaux sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Proposition 3 :

- 1) Toute fonction continue est CPM.
- 2) Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ CPM sur $[a, b]$. f est bornée sur $[a, b]$.
- 3) La combinaison linéaire de deux fonctions CPM sur I est une fonction CPM.
- 4) $\mathcal{C}_{pm}(I, \mathbb{K})$ est un espace vectoriel.

Proposition 4 : (Approximation d'une fonction CPM par une fonction en escaliers)

$\forall f \in \mathcal{C}_{pm}([a, b], \mathbb{K}), \forall \varepsilon > 0, \exists \Phi \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{K}), \forall x \in [a, b], |f(x) - \Phi(x)| \leq \varepsilon$

II) Intégrale sur un segment d'une fonction en escaliers

Proposition et définition 1 :

Soient $f \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{K})$ et $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$ une subdivision adaptée.

Notons $c_k = f\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right)$ la valeur de f sur $]x_k, x_{k+1}[$.

- 1) La somme $\sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) c_k$ ne dépend pas de la subdivision adaptée choisie.
- 2) $\sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) c_k$ s'appelle l'intégrale de f sur $[a, b]$, et se note $\int_a^b f(x) dx$.

Proposition 2 : (Linéarité de l'intégrale)

Soient $f, g \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{K})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. On a

$$\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x)) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx + \mu \int_a^b g(x) dx$$

Proposition 3 : (Relation de Chasles)

Soient $f \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{K})$ et $a \prec c \prec b$.

- 1) f est en escalier sur $[a, c]$ et $[c, b]$.
- 2) $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$

Proposition 4 : (Positivité de l'intégrale)

Soit $f \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$. On a :

$$f \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f(x) dx \geq 0$$

Proposition 5 : (Croissance de l'intégrale)

Soient $f, g \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$. On a :

$$f \preceq g \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \preceq \int_a^b g(x)dx$$

Proposition 6 : (L'inégalité triangulaire)

Soit $f \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$. On a :

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \preceq \int_a^b |f(x)|dx$$

III) Intégrale sur un segment d'une fonction continue par morceaux**Proposition et définition 1 :**

Soit $f \in \mathcal{C}_{pm}([a, b], \mathbb{R})$.

$$\text{Notons : } \begin{cases} J^-(f) = \left\{ \int_a^b g(x)dx \mid g \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R}) \text{ et } g \preceq f \right\} \\ J^+(f) = \left\{ \int_a^b g(x)dx \mid g \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R}) \text{ et } g \succeq f \right\} \end{cases}$$

- 1) $\inf(J^+)$ et $\sup(J^-)$ existent et sont égales.
- 2) Cette valeur commune s'appelle **l'intégrale** de f sur $[a, b]$.

Elle se note $\int_a^b f(x)dx$.

Proposition 2 : (Linéarité de l'intégrale)

Soient $f, g \in \mathcal{C}_{pm}([a, b], \mathbb{R})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On a

$$\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))dx = \lambda \int_a^b f(x)dx + \mu \int_a^b g(x)dx$$

Proposition 3 : (Relation de Chasles)

Soient $f \in \mathcal{C}_{pm}([a, b], \mathbb{R})$ et $a \prec c \prec b$.

- 1) f est CPM sur $[a, c]$ et $[c, b]$.
- 2) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

Proposition 4 : (Positivité de l'intégrale)

Soit $f \in \mathcal{C}_{pm}([a, b], \mathbb{R})$. On a :

$$f \succeq 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \succeq 0$$

Proposition 5 : (Croissance de l'intégrale)

Soient $f, g \in \mathcal{C}_{pm}([a, b], \mathbb{R})$. On a :

$$f \preceq g \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \preceq \int_a^b g(x)dx$$

Proposition 6 : (L'inégalité triangulaire)

Soit $f \in \mathcal{C}_{pm}([a, b], \mathbb{R})$. On a :

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \preceq \int_a^b |f(x)|dx$$

Proposition 7 : (Intégrale nulle d'une fonction continue positive)

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

Si $\left(\begin{array}{l} 1) f \text{ continue} \\ 2) f \text{ positive} \\ 3) \int_a^b f(x)dx = 0 \end{array} \right)$ alors $(f = 0 \text{ sur } [a, b])$

IV) Régularité de la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$

Proposition 1 : (Généralisation de la relation de Chasles)

Soient $f \in \mathcal{C}_{pm}(I, \mathbb{R})$ et $a, b, c \in I$. On a

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Proposition 2 : (Régularité de la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$)

- 1) Si f est CPM sur I alors $\left(\forall a \in I, F : x \mapsto \int_a^x f(t)dt \text{ est continue sur } I \right)$
- 2) Si f est continue sur I alors $\left\{ \begin{array}{l} 1) \forall a \in I, F : x \mapsto \int_a^x f(t) dt \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } I \\ 2) \forall x \in I, F'(x) = f(x) \end{array} \right.$

- 3) Si f est continue sur I alors pour tout $a \in I$, $F : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est la primitive de f qui s'annule en a .
- 4) Deux primitives de f diffèrent par une constante.
- 5) Si f est continue sur I alors pour tout $a, b \in I$, $\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$ où F est une primitive de f sur I .
Qu'on note $[F(t)]_a^b$.
- 6) Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I alors

$$\forall a, b \in I, \int_a^b f'(t) dt = f(b) - f(a)$$

Réflète :

$$\left(\int_a^x f(t) dt \right)' = f(x)$$

V) Techniques de calcul d'intégrales

Proposition 1 (Intégration par parties)

Soient $f, g \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$. On a :

$$\forall a, b \in I, \int_a^b f'(t)g(t) dt = [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b f(t)g'(t) dt$$

Proposition 2 (Changement de variable)

Si $\left(\begin{array}{l} 1) f : I \mapsto \mathbb{R} \text{ continue.} \\ 2) \Phi : J \mapsto \mathbb{R} \text{ de classe } \mathcal{C}^1 \\ 3) \Phi(J) \subset I \end{array} \right)$ alors $\left(\forall \alpha, \beta \in J, \int_{\Phi(\alpha)}^{\Phi(\beta)} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\Phi(t)) \cdot \Phi'(t) dt \right)$

Vocabulaire :

On dit qu'on a effectué le changement de variable $x = \Phi(t)$.

VI) Approximation d'une intégrale

1) Méthode des rectangles

Proposition 1 :

Soit f CPM sur $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On a :

- 1) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{b-a}{n} \cdot \sum_{k=1}^n f \left(a + k \cdot \frac{b-a}{n} \right) \right] = \int_a^b f(x) dx$ (La plus utilisée)
- 2) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{b-a}{n} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} f \left(a + k \cdot \frac{b-a}{n} \right) \right] = \int_a^b f(x) dx$

Cas particulier fréquent : (Cas de $[a,b]=[0,1]$)

Si f est CPM sur $[0, 1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ alors on a :

$$1) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \right] = \int_0^1 f(x) dx \text{ (La plus utilisée)}$$

$$2) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{n} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \right] = \int_0^1 f(x) dx$$

2) Méthode des trapèzes

$x_0 = a \prec \dots \prec x_n$ étant une subdivision régulière de $[a, b]$.
On rappelle que

$$\forall 0 \preceq k \preceq n, \quad x_k = a + k \frac{b-a}{n}$$

Notons T_n la somme des aires des rectangles de bases $[x_k, x_{k+1}]$

on a :

$$T_n = \frac{b-a}{n} \left[\frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f\left(a + k \cdot \frac{b-a}{n}\right) \right]$$

Proposition :

$$\text{Si } f \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R}) \text{ alors } \begin{cases} 1) \lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = \int_a^b f(x) dx \\ 2) \left| T_n - \int_a^b f(x) dx \right| = O\left(\frac{1}{n^3}\right) \end{cases}$$

Cas particulier : (Cas de $[a,b]=[0,1]$)

Si $f \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$ alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n} \left[\frac{f(0) + f(1)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \right] \right) = \int_0^1 f(x) dx$$

VII) Intégration d'une fonction complexe

Définition :

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ CPM. Soient $a, b \in I$.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \operatorname{Re}(f(x))dx + \mathbf{i} \int_a^b \operatorname{Im}(f(x))dx.$$

NB :

Les propriétés (Chasles, IPP, ...) des intégrales des fonctions réelles valent aussi pour les fonctions complexes.

VIII) Formules de Taylor

1) Formule de Taylor avec reste intégrale

Proposition :

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{K})$. On a :

$$\forall a, b \in I, f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt$$

2) Inégalité de Taylor-Lagrange

Proposition :

Soient $n \in \mathbb{N}$.

Si $\left(\begin{array}{l} 1) f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{K}) \\ 2) \exists M \geq 0, \forall t \in I, |f^{(n+1)}(t)| \leq M \end{array} \right)$

alors $\left(\forall a, b \in I, \left| f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k \right| \leq \frac{M|b-a|^{n+1}}{(n+1)!} \right)$

3) Formule de Taylor-Young

Proposition :

Soit $n \in \mathbb{N}$. Si $f \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{K})$ alors

$$\forall a \in I, f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + o(x-a)^n$$

FIN