المملكة المغربية

ROYAUME DU MAROC

Ministère de l'Enseignement Supérieur de la Recherche
Scientifique de la Formation des Cadres

Présidence du Concours National Commun
École Nationale Supérieure des Mines de Rabat

CONCOURS NATIONAL COMMUN
d'admission aux Établissements de Formation d'Ingénieurs et Établissements Assimilés

Session 2016

ÉPREUVE DES MATHÉMATIQUES II

Filière MP

Durée 4 heures

cette épreuve comporte 4 pages au format A4, en plus de cette page de garde
L'usage de la calculatrice est interdit

L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats de la filière MP,
comporte 4 pages.
L'usage de tout matériel électronique, y compris la calculatrice, est interdit.

Les candidats sont informés que la qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements constitueront des éléments importants pour l'appréciation des copies. Il convient en particulier de rappeler avec précision les références des questions abordées.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Le sujet de cette épreuve est composé d'un problème.

Durée : 4 heures

Problème

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2, on désigne par $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels et on note par $E^* = \mathscr{L}(E, \mathbb{R})$, le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des formes linéaires sur E, (une forme linéaire sur E est une application linéaire de E sur $\mathbb{R}$). On rappelle qu'un hyperplan de E est un sous-espace vectoriel supplémentaire à une droite vectorielle dans E. La matrice transposée de M est notée ${}^tM$. Si $M \in E$, on note $\mathrm{Vect}(M)$ le sous-espace vectoriel de E engendré par M. On désigne par I_n la matrice unité de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et pour tout $s \in \mathbb{N}$, on note $[\![1, n]\!] = \{1, ..., s\}$.
On définit l'application trace, notée Tr, de E vers $\mathbb{R}$ comme suit, pour tout $M = (m_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in E$, $\mathrm{Tr}(M) = \sum\limits_{k=1}^{n} m_{k,k}$.
L'objet du problème est de montrer, dans la partie V, que tout hyperplan vectoriel de E contient au moins une matrice inversible et dans la partie VI, que tout hyperplan vectoriel de E qui est muni d'un produit scalaire, contient au moins une matrice orthogonale.

Partie I
Étude de quelques propriétés de l'application trace

1. (a) Montrer que Tr est une forme linéaire.
   (b) Montrer que pour tous éléments A et B de E, $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA) = \mathrm{Tr}(({}^tA)({}^tB))$.
   (c) Déterminer la dimension de $\ker \mathrm{Tr}$.
   (d) Montrer que $E = \ker \mathrm{Tr} \oplus \mathrm{Vect}(I_n)$.
   (e) Vérifier que $\ker \mathrm{Tr}$ est un hyperplan de E qui contient au moins une matrice inversible.

2. Soit φ l'application qui, à toute matrice M de E associe $\varphi(M) = M + \mathrm{Tr}(M)I_n$.
   (a) Montrer que φ est un automorphisme de E.
   (b) i. Déterminer $E_1(\varphi) = \{M \in E;\ \ \varphi(M) = M\}$.
      ii. Montrer que $E_{n+1}(\varphi) = \{M \in E;\ \ \varphi(M) = (n+1)M\} = \mathrm{Vect}(I_n)$.
      iii. En déduire que φ est diagonalisable et déterminer les valeurs propres de φ.

3. Soit J une matrice non nulle de E dont la trace est nulle. On considère ψ l'endomorphisme de E qui, à toute matrice M de E associe $\psi(M) = M + \mathrm{Tr}(M)J$.
   (a) Vérifier que le polynôme $X^2 - 2X + 1$ est un polynôme annulateur de ψ.
   (b) Montrer que 1 est la seule valeur propre de ψ.
   (c) ψ est-il diagonalisable ? Justifier la réponse.

Partie II
Un premier résultat préliminaire

Soient F et G deux espaces vectoriels de dimensions respectivement finies $p \in \mathbb{N}^*$ et $m \in \mathbb{N}^*$. Soit u une application linéaire de F vers G, de rang r tel que $r \in \mathbb{N}$. $\mathscr{M}_{m,p}(\mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des matrices à coefficients réels, à m lignes et p colonnes.

1. Soit F_1 un supplémentaire de $\ker u$ dans F, on considère l'application $v : F_1 \to \mathrm{Im}(u)$ telle que $x \longmapsto v(x) = u(x)$. Montrer que v est un isomorphisme.

2. On suppose que $0 < r < \min(p, m)$ et on note $\mathscr{B} = (e_1, ..., e_p)$ une base de F, telle que $(e_1, ..., e_r)$ soit une base de F_1 et $(e_{r+1}, ..., e_p)$ une base de $\ker u$. On pose, pour tout entier naturel $i \in [\![1, r]\!]$, $\varepsilon_i = v(e_i)$.

(a) Montrer qu'il existe une famille $(\varepsilon_{r+1}, ..., \varepsilon_m)$ de vecteurs de G, telle que la famille $\mathscr{C} = (\varepsilon_1, ..., \varepsilon_m)$ soit une base de G.

(b) Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u)$, la matrice de u relativement aux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$.

3. En déduire que pour toute matrice M de $\mathscr{M}_{m,p}(\mathbb{R})$, si $0 < r = \mathrm{rg}(M) < \min(m, p)$, alors il existe deux matrices inversibles S et T respectivement de $\mathscr{M}_m(\mathbb{R})$ et $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ telles que $M = SJ_{m,p,r}T^{-1}$ avec $J_{m,p,r} = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{m,p}(\mathbb{R})$ et I_r la matrice identité de $\mathscr{M}_r(\mathbb{R})$.

4. Quelle est la forme de la matrice $J_{m,p,r}$, dans chaque cas suivant, ($0 < r = p < m$), ($0 < r = m < p$), ($0 < r = m = p$) ? Justifier la réponse.

Partie III
Un deuxième résultat préliminaire

Soit L un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension finie s($s \in \mathbb{N}^*$). Notons $L^* = \mathscr{L}(L, \mathbb{R})$ l'espace des formes linéaires de L. Soit $\mathscr{B} = (l_1, ..., l_s)$ une base de L. On note, pour tout $i \in [\![1, s]\!]$, l_i^* la forme linéaire sur L définie de la façon suivante, pour tout entier $j \in [\![1, s]\!]$, $l_i^*(l_j) = \delta_i^j$ où $\delta_i^j = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$, le symbole de Kronecker.

1. Montrer que $\mathscr{B}^* = (l_1^*, ..., l_s^*)$ est une famille libre de L^*.

2. Soit $x \in L$ tel que $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{s} x_i l_i$, montrer que, pour tout $j \in [\![1, s]\!]$, $l_j^*(x) = x_j$.

3. En déduire que $\mathscr{B}^*$ est une famille génératrice de L^*.

4. En déduire la dimension de L^*.

Partie IV
Une caractérisation d'une forme linéaire sur E

Soit A une matrice de E, on définit l'application ϕ_A de E vers $\mathbb{R}$, de la façon suivante, pour tout M de E, $\phi_A(M) = \mathrm{Tr}(AM)$.

1. Vérifier que ϕ_A est une forme linéaire sur E.

2. Soit h l'application définie de E vers E^* par $A \to h(A) = \phi_A$.
Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, n]\!]$, une matrice élémentaire $E_{i,j} = (e_{k,l})_{1 \le k,l \le n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est définie comme suit, pour tout couple d'entiers $(k, l) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, n]\!]$, $e_{k,l} = \delta_k^i \delta_l^j$, (δ_k^i (resp. δ_l^j) est le symbole de Kronecker qui est défini dans la partie III).

(a) Vérifier que h est une application linéaire.

(b) i. On pose $A = (a_{k,l})_{1 \le k,l \le n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et soit $(i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, n]\!]$, calculer $\phi_A(E_{i,j})$ en fonction des coefficients de la matrice de A.

ii. En déduire que h est injective.

(c) En déduire que h est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Partie V
Tout hyperplan de E contient au moins une matrice inversible

Soit H un hyperplan de E.

1. Montrer que pour toute matrice A non nulle de E qui n'appartient pas à H, on a $E = H \oplus \mathrm{Vect}(A)$.

2. Montrer qu'il existe une matrice B de E telle que $H = \ker(\phi_B)$.

3. On note $r = \mathrm{rg}(B)$ et on considère la matrice de E, $P_1 = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 1 & & & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(a) Montrer que P_1 est une matrice inversible.

(b) On suppose que $0 < r < n$ et on note $R_r = (r_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, avec $\left\{ \begin{array}{l} r_{i,i} = 1 \text{ si } 1 \leq i \leq r \\ r_{i,j} = 0 \text{ sinon} \end{array} \right.$. Montrer que P_1 appartient à $\ker(\phi_{R_r})$.

4. En déduire que tout hyperplan H de E contient au moins une matrice inversible.

Partie VI
Tout hyperplan de E contient au moins une matrice orthogonale

L'espace vectoriel E étant muni du produit scalaire défini comme suit, pour toutes matrices M et N de E, $(M|N) = \mathrm{Tr}({}^tMN)$. On rappelle que le groupe orthogonal et l'espace vectoriel des matrices symétriques de E sont notés respectivement $\mathscr{O}_n = \{M \in E;\ {}^tMM = I_n\}$ et $S_n = \{M \in E;\ {}^tM = M\}$.
Soit N un élément de $\mathscr{O}_n$, on définit l'application θ_N de E dans lui-même comme suit, pour tout P de E, $\theta_N(P) = {}^t NPN$.

1. On pose $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ et $B = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ deux éléments de E.

(a) Montrer que $(A|B) = \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{i=1}^{n} a_{i,j} b_{i,j}$.

(b) Vérifier que tout hyperplan de E est l'orthogonal d'une matrice Y non nulle, cet hyperplan sera noté $\mathscr{H}_Y$.

(c) Montrer que pour toute matrice orthogonale N de E, θ_N est un automorphisme d'algèbres de E.

(d) Vérifier que pour toutes matrices N_1 et N_2 orthogonales de E, $\theta_{N_1} \circ \theta_{N_2} = \theta_{N_2 N_1}$ et $(\theta_{N_1})^{-1} = \theta_{{}^tN_1}$.

2. Montrer que pour toute matrice orthogonale N de E, θ_N est une bijection de $\mathscr{O}_n$ sur lui-même.

3. Montrer que pour toute matrice orthogonale N de E, θ_N est une bijection de $\mathscr{S}_n$ sur lui-même.

4. Soit Y une matrice non nulle de E, P un élément de E et N une matrice orthogonale de E, montrer que la matrice P appartient à $\mathscr{H}_Y$ si et seulement si $\theta_N(P)$ appartient à $\mathscr{H}_{\theta_N(Y)}$.

5. On suppose dans cette question que n est pair. Soit Y un élément non nul de E. On pose $Y_s = \dfrac{1}{2}(Y + {}^tY)$.

(a) Montrer que $\mathscr{O}_n \cap \mathscr{S}_n \cap \mathscr{H}_Y = \mathscr{O}_n \cap \mathscr{S}_n \cap \mathscr{H}_{Y_s}$.

(b) Montrer qu'il existe une matrice orthogonale U de E telle que $Y' = \theta_U(Y_s)$ soit diagonale.

(c) On considère la matrice suivante $Q = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \iddots & \iddots & 0 \\ 0 & \iddots & \iddots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ de E, vérifier que $Q \in \mathscr{O}_n \cap \mathscr{S}_n \cap \mathscr{H}_{Y'}$.

(d) Montrer que $\theta_{{}^tU}(Q) \in \mathscr{O}_n \cap \mathscr{S}_n\mathscr{H}_Y$.

(e) En déduire que si n est un nombre pair, alors tout hyperplan $\mathscr{H}_Y$ de E contient au moins une matrice orthogonale et symétrique.

6. On suppose maintenant que $n = 2p+1$ où $p \geq 1$. On rappelle qu'une matrice orthogonale est positive si son déterminant est égal à 1. Soit Y une matrice non nulle de E.

(a) Montrer qu'il existe une matrice orthogonale U de E, telle que les éléments diagonaux $d_{1,1}, d_{2,2}, ..., d_{n,n}$ de $D = \theta_U(Y)$ vérifient $|d_{1,1}| \leq |d_{2,2}| \leq ... \leq |d_{n,n}|$.

(b) Si $d_{n,n} = 0$, déterminer dans ce cas, une matrice orthogonale et positive appartenant à $\mathscr{H}_Y$.

(c) On suppose que $d_{n,n} \neq 0$ et on considère la suite $(\varepsilon_k)_{1\leq k\leq n}$ définie de la façon suivante, pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq n$, ε_k est le signe de $d_{k,k}$ si $d_{k,k} \neq 0$, et $\varepsilon_k = 1$ si $d_{k,k} = 0$.
Soit $P' = (p'_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$, la matrice carrée diagonale d'ordre $2p-1$, telle que, pour tout entier k, $1 \leq k \leq 2p-1$, $p'_{k,k} = (-1)^k\varepsilon_k$. On pose aussi, pour tout réel α,
$A_\alpha = \begin{pmatrix} \varepsilon_{2p}\cos\alpha & -\varepsilon_{2p}\sin\alpha \\ \varepsilon_{2p+1}\sin\alpha & \varepsilon_{2p+1}\cos\alpha \end{pmatrix} \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et $P_\alpha = \begin{pmatrix} P' & 0 \\ 0 & A_\alpha \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2p+1}(\mathbb{R})$.

i. Vérifier que P_α est une matrice orthogonale.

ii. Montrer qu'il existe trois réels a, b et c dépendant de $(d_{k,k})_{1\leq k\leq n}$, $d_{2p+1,2p}$, $d_{2p,2p+1}$ et de $(\varepsilon_k)_{1\leq k\leq n}$ tels que $(P_\alpha|D) = a\cos\alpha + b\sin\alpha - c$, avec $a > 0$.

iii. Soit β un réel tel que $\sin\beta = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $\cos\beta = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.
On suppose dans cette question que $|c| \leq a$.
Montrer qu'il existe au moins un réel α tel que $\sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha+\beta) = c$.

iv. Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite croissante de nombres réels positifs. Montrer que pour tout entier $p \geq 1$, $0 \leq \sum_{k=1}^{2p-1} (-1)^{k-1} 1 a_k \leq a_{2p} + a_{2p+1}$.

v. En déduire qu'il existe un réel α_0 tel que $(P_{\alpha_0}|D) = 0$.

vi. En déduire que la matrice $\theta_{{}^tU}(P_{\alpha_0}) \in \mathscr{O}_n \cap \mathscr{H}_Y$.

vii. Établir que si n est un nombre impair, alors tout hyperplan $\mathscr{H}_Y$ de E contient au moins une matrice orthogonale et positive.

FIN DE L'ÉPREUVE