Calcul matriciel

Exercice 1

Considérons la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

1) i) Calculer A^2 et A^3.
   Deviner A^n pour tout $n \succeq 1$.
   ii) Montrer ce dernier résultat.
2) Posons $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
   Calculer B^n pour tout $n \succeq 1$.

Exercice 2

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ vérifiant $A^2 = 0$.
   Montrer que
   $$\forall k \in \mathbb{N},\ (I_n + A)^k = I_n + kA$$
   i) Via une récurrence
   ii) Via le binôme de Newton
2) En déduire $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
   Donner le résultat sous forme de bloc matriciel.

Exercice 3

1) Considérons la matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$.
   i) Montrer que $(A - I_2)$ est nilpotente.
   ii) En déduire toutes les puissances de A.
2) Considérons les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ définies par $u_0 = v_0 = 1$ et
   $\forall n \in \mathbb{N},\ \begin{cases} u_{n+1} &= 5u_n - 4v_n \\ v_{n+1} &= 4u_n - 3v_n \end{cases}$
   i) Justifier que
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$$
   ii) En déduire les termes généraux des suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$.

Exercice 4

Considérons la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 6 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$. Posons $B = A - I_3$.

1. Calculer B^2.
2. En déduire que A est inversible et déterminer son inverse.
3. Déterminer A^n , pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   Donner le résultat sous forme de tableau matriciel.

Exercice 5

Considérons la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

1) i) Calculer $A^2 - 3A + 2I_2$.
   ii) En déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.
2) Soit $n \succeq 2$.
   i) Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par (X^2-3X+2).
   ii) En déduire A^n. Donner-la sous forme de bloc matriciel.

Exercice 6

Considérons la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1) Soit $n \succeq 1$. Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ un matrice nilpotente d'indice $r \in \mathbb{N}^*$. Montrer que :
   i) A n'est pas inversible.
   ii) $(I_n - A)$ est inversible, et préciser son inverse en fonction des puissances de A.
2) En déduire que B est inversible et déterminer son inverse.

Exercice 7 (*Matrice de rotation*)

Notons pour tout réel θ, $R_\theta = \begin{pmatrix} cos(\theta) & -sin(\theta) \\ sin(\theta) & cos(\theta) \end{pmatrix}$

1. Montrer que
$$\forall \theta, \theta' \in \mathbb{R},\ R_{\theta+\theta'} = R_\theta R_{\theta'}$$
2. En déduire que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, R_θ est inversible et préciser R_θ^{-1}.
3. Que vaut $(R_\theta)^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$?
4. Déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe une matrice $A \in M_2(\mathbb{R})$ telle que $A^n = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$