$x > 1$

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \quad ; \quad I(x) = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^x}\,dt \qquad I(x) \leqslant \zeta(x) \leqslant I(x)+1$$

$$\left(\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^x}\,dt \underset{A}{\leqslant} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \underset{B}{\leqslant} \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^x}\,dt + 1 \right) ??$$

$t \longmapsto \frac{1}{t^x} = t^{-x}$ $\searrow$

$$\Longrightarrow \forall n \geqslant 1, \quad \underbrace{\frac{1}{(n+1)^x} \leqslant \int_n^{n+1} \frac{1}{t^x}\,dt \leqslant \frac{1}{n^x}}$$

(La bac)

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{\left(\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^x}\,dt \right)}_{I(x)} \underset{\text{Chasles}}{\overset{\text{Relation de}}{=\!=\!=}} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\int_n^{n+1} \frac{1}{t^x}\,dt \right) \leqslant \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}}_{\zeta(x)}$$

A ✓

B) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \overset{?}{\leq} \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^x}\,dt + 1$?

On a : $\forall n \geq 2$, $\displaystyle \frac{1}{n^x} \leq \int_{n-1}^{n} \frac{1}{t^x}\,dt$

$$\Rightarrow \underbrace{\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^x}}_{\parallel} \leq \underbrace{\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\int_{n-1}^{n} \frac{1}{t^x}\,dt\right)}_{\parallel \text{ Charles}}$$

$$\zeta(x) - 1 \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^x}\,dt$$

$$\Rightarrow \zeta(x) \leq \left(\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^x}\,dt\right) + 1$$

$$\boxed{\frac{1}{x-1} \leq f(x) \leq \frac{1}{x-1} + 1} \quad \forall x > 1$$

$$f(x) \underset{x \to 1}{\sim} \; ?$$

Rép $f(x) \underset{x \to 1}{\sim} \dfrac{1}{x-1}$; En effet :

$$\forall x > 1, \; \underbrace{1}_{\downarrow\, 1} \leq \frac{f(x)}{\left(\frac{1}{x-1}\right)} \leq \underbrace{1 + (x-1)}_{\xrightarrow[x \to 1]{} 1}$$

Gendarmes $\Rightarrow \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x)}{\left(\frac{1}{x-1}\right)} = 1$

$$\Rightarrow f(x) \sim \frac{1}{x-1}$$

Question

Nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\ln n}{\sqrt[3]{n}}$?

Question

Nature de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\ln n}{\sqrt[3]{n}}$?

Rép. :

C'est $\sum_n \frac{\ln n}{n^{1/3}}$.

On a : $\frac{1}{3} < 1$.

Soit $\frac{1}{3} < \alpha < 1$.

$$\lim_n n^{\alpha} \cdot \left(\frac{\ln n}{n^{1/3}}\right) = \lim_n \underbrace{n^{\alpha - 1/3}}_{\to +\infty} \cdot \ln n \qquad \left(\alpha - \frac{1}{3} > 0\right)$$

$$\lim_n \frac{\left(\frac{\ln n}{n^{1/3}}\right)}{\left(\frac{1}{n^{\alpha}}\right)} = +\infty$$

$$\lim_n \frac{\left(\frac{1}{n^{\alpha}}\right)}{\left(\frac{\ln n}{n^{1/3}}\right)} = 0$$

$$\frac{1}{n^{\alpha}} = o\left(\frac{\ln n}{\sqrt[3]{n}}\right)$$

suite

Or $\sum_n \frac{1}{n^{\alpha}}$ Div (car $\alpha < 1$)

D'où $\sum_{1} \frac{\ln n}{\sqrt[3]{n}}$ Div

$\boxed{\text{End}}$

Q) $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^x}$ CU sur $]1,+\infty[$?

Rép : Non, elle ne CV pas Unif sur $]1,+\infty[$:

En effet :

$\boxed{CN \overset{\text{Oui}}{\Longrightarrow} CU}$

$\cancel{CN}$; On ne peut conclure quant à la CU

$\left(\sum \frac{1}{n^x} \text{ CU sur }]1,+\infty[\right) \iff \begin{cases} 1) \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^x} \text{ CS sur }]1,+\infty[\text{ (OK : vérifiée)} \\ 2) \left(R_n(x)\right)_{n\geq 1} \text{ CU vers 0 sur }]1,+\infty[\end{cases}$

$\sum \frac{1}{n^x}$ ne Conv pas Unift $\iff$ $\left((R_n(x))_n \text{ ne CV pas Unif vers 0 sur }]1,+\infty[\right)$

Q) $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^x}$ CU sur $]1,+\infty[$?

Rep: Non, Elle ne CV pas Unif sur $]1,+\infty[$:

En effet :

$$\boxed{CN \overset{\text{Jamais}}{\Longrightarrow} CU}$$

$\cancel{CN}$; on ne peut conclure quant à la CU

$\left(\sum \frac{1}{n^x} \text{ CU sur }]1,+\infty[\right) \Longleftrightarrow \begin{cases} 1)\ \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^x} \text{ CS sur }]1,+\infty[\text{ (OK: vérifié} \\ 2)\ \left(R_n(x)\right)_{n\geq 1} \text{ CU vers 0 sur }]1,+\infty[\end{cases}$

$\sum \frac{1}{n^x}$ ne Conv pas Unift $\Longleftrightarrow \left(\left(R_n(x)\right)_n \text{ ne CV pas Unif vers 0 sur }]1,+\infty[\right)$

Si on avait CU de $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^x}$ sur $]1,+\infty[$

$$\lim_{x\to 1}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^x}\right) \overset{?}{=} \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\underbrace{\lim_{x\to 1}\frac{1}{n^x}}_{=l_n=\frac{1}{n}}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$$

Mais DIV

Brouillon

$a\in\overline{X}$

$a=1\in\overline{]1,+\infty[}$

Raison par l'absurde et supp $\sum\frac{1}{n^x}$ CU sur $]1,+\infty[$.

On a : $(\forall n\geq 1,\ \lim_{x\to 1}\frac{1}{n^x}=l_n=\frac{1}{n}\in\mathbb{R}$

D'où (Thm 2 – Page 6) : $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ CV.

absurde