ERREURS---Algèbre Linéaire du SUP

Erreur N° 1

Déduire $B_1 = B_2$.

on a $AB_2 = AB_1 \Rightarrow AB_2 - AB_1 = 0$

$\Rightarrow A(B_2 - B_1) = 0$

or $M_n(\mathbb{R})$ est une $\mathbb{R}$-algèbre donc $A = 0$ ou $B_2 - B_1 = 0$

Erreur N° 2

$\Rightarrow a^2(y) = 0$

$\Rightarrow y \in Ker(a^2) \subset Ker(a)$

$\Rightarrow a(y) = 0 \Rightarrow \underline{x = 0}$

Erreur N° 3

$E = \mathbb{R}[X]$

on a ϕ est un endomorphisme de $E \to E$ injectif

Donc ϕ est bijective et ϕ surjective.

Erreur N° 4

3) $\mathcal{E} = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ est une famille libre car ses vecteurs sont 2 à 2 non colinéaires, et contient 3 vecteurs dans un espace vectoriel de dimension 3.

Erreur N° 5

On a :

$a_0(x) = 0 \Rightarrow a_0(x) = a(0).$

$\Rightarrow a_0(x) = a_0(0).$

$\Rightarrow x = 0$

D'où :

C/C a_0 est un automorph de $Im(a)$.

Erreur N° 6

b) Mq la suite $(a_n + b_n)$ ~~n'est~~ est constante puisque *$(b_n + 1)$

(*) Mq par récurrence que la suite $(a_n + b_n)$ est constante.

Erreur N° 7

On a d'après la question précedente $AB_1 = AB_2$

donc, on peut conclure que $B_1 = B_2$

$(AB_1 - AB_2 = 0 \Rightarrow A(B_1 - B_2) = 0 \Rightarrow B_1 = B_2)$

Erreur N° 8

Soit $x \in \ker(a) \cap Im(a)$

donc $x \in \ker(a)$ et $x \in Im(a)$ $\quad (Im(a) = \{\forall y \in \mathbb{R}\ \exists x \in \mathbb{R} / a(x) = y\})$

donc $a(x) = 0$ et $a(x) = y$ $\quad y \in \mathbb{R}$

Erreur N° 9

Soit $\Phi : E \to E$

tq: $\Phi(P(x)) = (2x-1)P(x) - (x^2 + \frac{1}{2}) P'(x)$.

① Mq: Φ est linéaire.

Calculons,

$\Phi P(\alpha x + y) = (2(\alpha x + y) - 1) P(\alpha x + y) - ((\alpha x + y)^2 + \frac{1}{2}) P'(\alpha x + y)$

Après calcul,

= ~~[illegible]~~

$= \alpha^2 (2x-1) P(x) + (2y-1) P(y) - \alpha^2 (x^2 + \frac{1}{2}) P'(x) - (y^2 + \frac{1}{2}) P'(y)$.

$= \alpha \Phi P(x) + \Phi P(y)$

D'où Φ est linéaire.

Erreur N° 10

1) Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}$.

on a. $\alpha I_3 + \beta S = 0. \Rightarrow \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\beta \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\beta \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$\Rightarrow \begin{cases} \alpha + \frac{1}{3}\beta = 0 \\ \alpha + \beta = 0 \\ \alpha + \beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = -\beta$

Donc (I_3, S) n'est pas libre car pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

Erreur N° 11

Calculons $b \circ a \circ b(x)$

$$b \circ a \circ b(x) = a_0^{-1} \circ p(x) \circ a \circ a_0^{-1} \circ p(x)$$

Erreur N° 12

4) Mq ϕ est surjective

ceci veut dire qu'on doit montrer que :

$$(\exists Q \in E)(\forall P \in E) : \phi(P) = Q$$

Erreur N° 13

1) Mq φ est un automorphisme de l'anneau $(\mathbb{Z}\sqrt{2}, +, \cdot)$

Mq φ est un morphisme d'anneau

On a $\varphi(1) = 1$

Soit $x, y \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ tq $x = m + n\sqrt{2}$ et $y = m' + n'\sqrt{2}$ avec $m, n, m', n' \in \mathbb{Z}$

et $\lambda \in \mathbb{Z}$

$$\varphi(\lambda x + y) = \varphi(\lambda(m + n\sqrt{2}) + (m' + n'\sqrt{2}))$$

Erreur N° 14

$\alpha\beta\gamma = 0$

donc $\gamma = 0$ et α et β non nul

ou $\alpha = 0$ et γ et β non nul

ou $\beta = 0$ et α et γ non nul

Erreur N° 15

La famille (I_3, S) est libre, en effet

$\lambda_1 I_3 + \lambda_2 S = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$

puisque I_3 et S ne sont pas nulles

Erreur N° 16

On a P est matrice de passage de $\mathcal{E}$ à E. On a trouvé que P est inversible donc on déduit que $\mathcal{E}$ est une base de E avec $\dim(E) = \mathrm{Card}(\mathcal{E})$.

Erreur N° 17

b/ A semblable à $D \Leftrightarrow \exists P \in GL_n(\mathbb{R})$ tq $A = PDP^{-1}$
avec D matrice diagonale
mq D possède exactement deux coefficients non nuls
par absurde supposons que les 3 coeff sont nul

Erreur N° 18

2) a) $a_0 \in \mathcal{L}(\mathrm{Im}(a))$, càd : $a_0 : \mathrm{Im}(a) \to \mathrm{Im}(a)$
$x \mapsto a(x)$.
Soit $x \in \mathrm{Im}(a)$.
On a : $x \in \mathrm{Ker}\, a_0 \Rightarrow a_0(x) = 0$.
$\Rightarrow a(x) = 0$.
$\Rightarrow x \in \mathrm{Ker}(a) \cap \mathrm{Im}(a)$.
$\Rightarrow x = 0$.
Donc : $\mathrm{Ker}(a_0) = \{0\}$.
Alors a_0 est injective
et a_0 est surjective par construction.
Donc : a_0 est bijective.

Erreur N° 19

$a \neq 0 \Rightarrow a + b\sqrt{2} \neq 0$
$\Rightarrow a^2 \neq 2b^2$

Erreur N° 20

donc a_0 ~~bijectif~~ et l'ensemble d'arrivée est le même que celui de départ donc a_0 bijectif d'où a_0 automorphisme de $Im(a)$.

Erreur N° 21

3) P est la matrice de passage de $\mathcal{E}$ vers E
On a P inversible donc E est une base de E.

Erreur N° 22

On a aussi l'ensemble de départ est aussi l'ensemble d'arrivée. donc pour montrer que P est bijective, il suffit de montrer qu'elle est injective.

Erreur N° 23

$\Rightarrow \quad a(a(x')) = 0$

$\Rightarrow \quad a^2(x') = 0$

$\Rightarrow \quad x' = 0.$ car a^2 linéaire

Erreur N° 24

1- Sq (I_3, S) liée:
$\exists\ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}^*$ tq $\alpha_1 I_3 + \alpha_2 S = 0$