

CONCOURS CENTRALE-SUPÉLEC 2025

CORRIGÉ DE MATHÉMATIQUES I MP - MPI

m.laamoum2@gmail.com¹

Irrationalité de $\zeta(2)$

Partie A - Un encadrement de la fonction π

I - Calculs préliminaires

Q1. Considérons le coefficient binomial

$$\binom{2n+1}{n} = \frac{(2n+1)!}{n!(n+1)!}.$$

Soit p un nombre premier tel que $n+2 \leq p \leq 2n+1$. Alors p divise $(2n+1)!$. Comme $p > n+1 \geq n$, p ne divise ni $n!$ ni $(n+1)!$. Donc il divise $\binom{2n+1}{n}$.

Par suite $\prod_{\substack{n+2 \leq p \leq 2n+1, \\ p \text{ premier}}} p$ divise $\binom{2n+1}{n}$ ce qui donne $\prod_{\substack{n+2 \leq p \leq 2n+1, \\ p \text{ premier}}} p \leq \binom{2n+1}{n}$.

Pour la seconde inégalité, on utilise la formule du binôme :

$$2^{2n+1} = \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k}.$$

donc

$$\binom{2n+1}{n} + \binom{2n+1}{n+1} = 2 \binom{2n+1}{n} \leq \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} = 2^{2n+1}.$$

d'où

$$\binom{2n+1}{n} \leq 2^{2n} = 4^n.$$

Ainsi $\prod_{\substack{n+2 \leq p \leq 2n+1, \\ p \text{ premier}}} p \leq \binom{2n+1}{n} \leq 4^n.$

Q2. Posons $P_n = \prod_{\substack{p \leq n \\ p \text{ premier}}} p$.

► Initialisation : $P_1 = 1 < 4^1$ et $P_2 = 2 < 4^2$.

► Hérédité : Supposons $P_k < 4^k$ pour $1 \leq k \leq n-1$.

Si n est pair, $n = 2m$. $P_n = P_{2m} = P_{2m-1}$. Par hypothèse de récurrence,

$$P_{2m-1} < 4^{2m-1} < 4^{2m} = 4^n.$$

1. Tous mes corrigés sont disponibles ici <https://tinyurl.com/4up84xze>

Si n est impair, $n = 2m + 1$.

$$P_n = P_{m+1} \times \prod_{m+2 \leq p \leq 2m+1} p.$$

Par hypothèse de récurrence, $P_{m+1} < 4^{m+1}$.

D'après Q1 on a

$$\prod_{m+2 \leq p \leq 2m+1} p \leq \binom{2m+1}{m} \leq 4^m$$

Donc

$$P_n < 4^{m+1} \cdot 4^m = 4^{2m+1} = 4^n.$$

Ainsi $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \prod_{\substack{p \leq n \\ p \text{ premier}}} p < 4^n}.$

Q3. Soit $x \geq 1$. Posons $n = \lfloor x \rfloor \geq 1$.

On a

$$\prod_{p \leq x} p = \prod_{p \leq n} p < 4^n$$

Comme $n \leq x$ alors $4^n \leq 4^x$. D'où $\boxed{\prod_{p \leq x} p < 4^x}.$

Q4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

► On a

$$\binom{2n}{n} < \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} = (1+1)^{2n} = 4^n$$

Donc $\binom{2n}{n} < 4^n$.

► Montrons-le par récurrence sur $n \geq 1$.

C'est vrai pour $n = 1$.

Hypothèse de récurrence : Supposons $\binom{2k}{k} \geq \frac{4^k}{2k}$ pour un $k \geq 1$. Montrons-le pour $k+1$:

On a

$$\binom{2(k+1)}{k+1} = \frac{(2k+2)!}{((k+1)!)^2} = \frac{(2k+2)(2k+1)(2k)!}{(k+1)^2 (k!)^2} = \frac{2(2k+1)}{k+1} \binom{2k}{k}.$$

En utilisant l'hypothèse de récurrence :

$$\binom{2(k+1)}{k+1} \geq \frac{2(2k+1)}{k+1} \frac{4^k}{2k} = \frac{2k+1}{k(k+1)} 4^k.$$

On a $\frac{2k+1}{k} \geq 2$, donc

$$\binom{2(k+1)}{k+1} \geq \frac{2}{(k+1)} 4^k = \frac{4^{k+1}}{2(k+1)}.$$

L'inégalité est vraie pour $k+1$. Par récurrence elle est vraie pour tout $k \geq 1$.

Ainsi $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{4^n}{2n} \leq \binom{2n}{n} < 4^n}.$

Q5. Formule de Legendre :

Soit p un nombre premier. La valuation p -adique vérifie $v_p(ab) = v_p(a) + v_p(b)$ pour tout a, b dans $\mathbb{N}^*$.

Donc

$$v_p(n!) = \sum_{k=1}^n v_p(k).$$

Posons $A_j(n) = \{k \leq n \mid v_p(k) = j\}$.

Cet ensemble est vide si $p^j > n$, c'est-à-dire $j > \left\lfloor \frac{\ln n}{\ln p} \right\rfloor$, posons $R_n(p) = \left\lfloor \frac{\ln n}{\ln p} \right\rfloor$.

Alors

$$v_p(n!) = \sum_{j=1}^{R_n(p)} \sum_{k \in A_j(n)} v_p(k) = \sum_{j=1}^{R_n(p)} j \sum_{k \in A_j(n)} 1 = \sum_{j=1}^{R_n(p)} j \operatorname{Card} A_j(n)$$

Remarquons que

$$k \in A_j(n) \Leftrightarrow k = mp^j \text{ et } p \nmid m$$

donc $A_j(n)$ est en bijection avec l'ensemble $\left\{ m \leq \frac{n}{p^j} ; p \nmid m \right\}$, ce dernier est égal à

$$\left[\left[1, \frac{n}{p^j} \right] \setminus \left\{ m \leq \frac{n}{p^j} ; p \mid m \right\} \right];$$

comme $\operatorname{Card} \left[\left[1, \frac{n}{p^j} \right] \right] = \left\lfloor \frac{n}{p^j} \right\rfloor$ et

$$\operatorname{Card} \left\{ m \leq \frac{n}{p^j} ; p \mid m \right\} = \operatorname{Card} \left\{ rp \leq \frac{n}{p^j} \right\} = \left\lfloor \frac{n}{p^{j+1}} \right\rfloor$$

alors

$$\operatorname{Card} A_j(n) = \left\lfloor \frac{n}{p^j} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{p^{j+1}} \right\rfloor$$

Par suite

$$v_p(n!) = \sum_{j=1}^{R_n(p)} j \left(\left\lfloor \frac{n}{p^j} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{p^{j+1}} \right\rfloor \right) = \sum_{j=1}^{R_n(p)} \left\lfloor \frac{n}{p^j} \right\rfloor + \sum_{j=1}^{R_n(p)} \left((j-1) \left\lfloor \frac{n}{p^j} \right\rfloor - j \left\lfloor \frac{n}{p^{j+1}} \right\rfloor \right)$$

La deuxième somme télescopique est nulle, donc

$$\boxed{v_p(n!) = \sum_{j=1}^{R_n(p)} \left\lfloor \frac{n}{p^j} \right\rfloor = \sum_{j=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^j} \right\rfloor}$$

Q6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $k \in \mathbb{N}$ et p nombre premier tel que p^k divise $\binom{2n}{n}$.

On a donc $k \leq v_p \left(\binom{2n}{n} \right)$.

Ecrivons $\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$, donc

$$v_p \left(\binom{2n}{n} \right) = v_p((2n)!) - 2v_p(n!).$$

En utilisant Q5 :

$$v_p \left(\binom{2n}{n} \right) = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\left\lfloor \frac{2n}{p^j} \right\rfloor - 2 \left\lfloor \frac{n}{p^j} \right\rfloor \right) = \sum_{j=1}^{R_{2n}(p)} \left(\left\lfloor \frac{2n}{p^j} \right\rfloor - 2 \left\lfloor \frac{n}{p^j} \right\rfloor \right) \text{ avec } R_{2n}(p) = \left\lfloor \frac{\ln 2n}{\ln p} \right\rfloor$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$ donc $2 \lfloor x \rfloor \leq 2x < 2 \lfloor x \rfloor + 2$, ainsi $\lfloor 2x \rfloor - 2 \lfloor x \rfloor \in \{0, 1\}$.

Par conséquent

$$v_p \left(\binom{2n}{n} \right) \leq \sum_{j=1}^{R_{2n}(p)} 1 = R_{2n}(p).$$

Donc

$$k \leq R_n(p) \leq \frac{\ln 2n}{\ln p} \text{ et } p^k \leq 2n$$

Ainsi $\boxed{\text{Si } p^k \text{ divise } \binom{2n}{n} \text{ alors } p^k \leq 2n}.$

II - Majoration de $\pi(x)$

Q7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\prod_{\substack{p \leq n \\ p \text{ premier}}} p = \prod_{\substack{p \leq \sqrt{n} \\ p \text{ premier}}} p \times \prod_{\substack{\sqrt{n} < p \leq n \\ p \text{ premier}}} p.$$

donc

$$\prod_{\substack{p \leq n \\ p \text{ premier}}} p \geq \prod_{\substack{\sqrt{n} < p \leq n \\ p \text{ premier}}} p.$$

Q8. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $P = \prod_{\substack{\sqrt{n} < p \leq n \\ p \text{ premier}}} p$.

Le nombre de facteurs premiers dans P est $\pi(n) - \pi(\sqrt{n})$ et chaque facteur p satisfait $p > \sqrt{n}$. Donc

$$P > (\sqrt{n})^{\pi(n) - \pi(\sqrt{n})} = n^{(\pi(n) - \pi(\sqrt{n}))/2}.$$

D'après Q2 et Q7,

$$P \leq \prod_{\substack{p \leq n \\ p \text{ premier}}} p < 4^n.$$

Ainsi $\boxed{n^{(\pi(n) - \pi(\sqrt{n}))/2} < 4^n}.$

Q9. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

► On a $\pi(\sqrt{n}) \leq \lfloor \sqrt{n} \rfloor \leq \sqrt{n}$.

Comparer $\sqrt{n}$ et $\frac{n}{\ln(n)}$ revient à comparer $\ln(n)$ et $\sqrt{n}$.

Posons $f(x) = \sqrt{x} - \ln(x)$ pour $x > 0$.

On a $f'(x) = \frac{\sqrt{x} - 2}{2x}$ et $f'(4) = 0$. f est croissante sur $[4, +\infty[$, décroissante sur $]0, 4]$ et admet un minimum en $x = 4$, avec $f(4) = 2(1 - \ln 2) > 0$. Donc $f(x) > 0$ pour tout $x > 0$. En particulier, $\sqrt{n} > \ln(n)$ pour tout $n \geq 2$.

Par suite $\sqrt{n} < \frac{n}{\ln(n)}$.

Ainsi $\boxed{\pi(\sqrt{n}) \leq \sqrt{n} < \frac{n}{\ln(n)}}.$

► D'après Q8, $n^{(\pi(n) - \pi(\sqrt{n}))/2} < 4^n$. Comme $\ln$ est croissante :

$$\frac{\pi(n) - \pi(\sqrt{n})}{2} \ln(n) < n \ln(4).$$

qui donne

$$\pi(n) < \pi(\sqrt{n}) + 2 \ln(4) \frac{n}{\ln(n)}$$

On a $\pi(\sqrt{n}) \leq \frac{n}{\ln(n)}$ donc

$$\pi(n) < (2 \ln(4) + 1) \frac{n}{\ln(n)}$$

on a $2 \ln 4 + 1 \approx 3.7726$, d'où $\boxed{\pi(n) \leq \frac{4n}{\ln(n)}}.$

Q10. Soit $x \geq 3$ et $f(t) = \frac{t}{\ln(t)}$ pour $t > 1$.

On a $f'(t) = \frac{\ln(t) - 1}{(\ln t)^2}$. $f'(t) > 0$ si $\ln(t) > 1$, c'est-à-dire $t > e$. La fonction f est donc croissante sur $[e, +\infty[$.

Soit $n = \lfloor x \rfloor$. On a $n \geq 3$ et $\pi(x) = \pi(n)$.

D'après Q9, on a

$$\pi(n) \leq 4f(n) \leq 4f(x)$$

Ainsi $\boxed{\pi(x) \leq \frac{4x}{\ln(x)}}.$

III - Minoration de $\pi(x)$

Q11. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère la décomposition en facteurs premiers de

$$\binom{2n}{n} = \prod_{\substack{p \leq 2n \\ p \text{ premier}}} p^{v_p\left(\binom{2n}{n}\right)}.$$

D'après Q6, pour chaque nombre premier $p \leq 2n$, on a

$$p^{v_p\left(\binom{2n}{n}\right)} \leq 2n.$$

Donc,

$$\binom{2n}{n} \leq \prod_{p \leq 2n} (2n) \leq (2n)^{\pi(2n)}.$$

Ainsi $\boxed{\binom{2n}{n} \leq (2n)^{\pi(2n)}}.$

Q12. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

► On a

$$\frac{2n \ln(2)}{\ln(2n)} - 1 - \frac{n \ln(2)}{\ln(2n)} = \frac{n \ln(2) - \ln(2n)}{\ln(2n)} = \frac{\ln(2^{n-1}/n)}{\ln(2n)}$$

Par récurrence on a $2^n \geq 2n$ pour tout $n \geq 1$.

On en déduit $\boxed{\frac{2n \ln(2)}{\ln(2n)} - 1 \geq \frac{n \ln(2)}{\ln(2n)}}.$

► Dédution pour $\pi(2n)$:

D'après Q4, $\binom{2n}{n} \geq \frac{4^n}{2n}$ pour $n \geq 1$. D'après Q11, $\binom{2n}{n} \leq (2n)^{\pi(2n)}$. Donc

$$\frac{4^n}{2n} \leq (2n)^{\pi(2n)}. \frac{4^n}{2n} \leq (2n)^{\pi(2n)}.$$

Puis on compose par le logarithme

$$\ln\left(\frac{4^n}{2n}\right) \leq \ln\left((2n)^{\pi(2n)}\right).$$

donc

$$n \ln 4 - \ln(2n) \leq \pi(2n) \ln(2n).$$

et

$$\pi(2n) \geq \frac{2n \ln 2}{\ln(2n)} - \frac{\ln(2n)}{\ln(2n)} = \frac{2n \ln 2}{\ln(2n)} - 1$$

En utilisant l'inégalité précédente : $\frac{2n \ln 2}{\ln(2n)} - 1 \geq \frac{n \ln 2}{\ln(2n)}.$

On obtient $\boxed{\pi(2n) \geq \frac{n \ln 2}{\ln(2n)}}.$

Q13. Soit $x \geq 3$ et $n = \lfloor \frac{x}{2} \rfloor$.

On a : $2n \leq x < 2n + 2$ et d'après Q12

$$\pi(x) \geq \pi(2n) \geq n \frac{\ln 2}{\ln(2n)} \geq n \frac{\ln 2}{\ln(x)}.$$

Comme $x \geq 3$ alors $\frac{x}{3} = \frac{x}{2} - \frac{x}{6} \geq 1$ ($\frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$) ce qui donne

$$\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor \geq \frac{x}{2} - 1 \geq \frac{x}{6}$$

Ainsi $\boxed{\pi(x) \geq \frac{\ln 2}{6} \frac{x}{\ln(x)}}.$

Partie B - Une majoration d'un PPCM

I - Une première majoration

Q14. Les idéaux de l'anneau $(\mathbb{Z}, +, \times)$ sont exactement de la forme $d\mathbb{Z}$ avec $d \in \mathbb{N}$.

Soit $r \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \dots, a_r$ des entiers naturels non nuls. L'ensemble $I = a_1\mathbb{Z} \cap \dots \cap a_r\mathbb{Z}$ est une intersection d'idéaux de l'anneau $(\mathbb{Z}, +, \times)$, donc c'est un idéal et il existe $d(a_1, \dots, a_r) \in \mathbb{N}$ tel que $I = d(a_1, \dots, a_r)\mathbb{Z}$.

Pour l'unicité, si il existe $d' \in \mathbb{N}$ tel que $I = d'\mathbb{Z}$. Alors $d'|d(a_1, \dots, a_r)$ et $d(a_1, \dots, a_r)|d'$, ce qui prouve que $d' = d(a_1, \dots, a_r)$.

Ainsi il existe un unique entier $d(a_1, \dots, a_r)$ tel que $\boxed{a_1\mathbb{Z} \cap \dots \cap a_r\mathbb{Z} = d(a_1, \dots, a_r)\mathbb{Z}}$.

Q15. Par définition, $d(a_1, \dots, a_r)\mathbb{Z} = \bigcap_{i=1}^r (a_i\mathbb{Z})$.

Pour tout i , $d(a_1, \dots, a_r)\mathbb{Z} \subseteq a_i\mathbb{Z}$, cela signifie que a_i divise $d(a_1, \dots, a_r)$.

Inversement, soit m un entier naturel non nul qui est divisible par $a_1, \dots, a_r$. Donc $m \in a_i\mathbb{Z}$ pour tout i , par suite,

$$m \in \bigcap_{i=1}^r (a_i\mathbb{Z}) = d(a_1, \dots, a_r)\mathbb{Z}.$$

Cela signifie que $d(a_1, \dots, a_r)$ divise m et $d(a_1, \dots, a_r) \leq m$. Donc $d(a_1, \dots, a_r)$ est le plus petit entier naturel qui est divisible par $a_1, \dots, a_r$.

$d(a_1, \dots, a_r)$ est le plus petit communs multiple de $a_1, \dots, a_r$, noté $\text{PPCM}(a_1, \dots, a_r)$.

Q16. On a

$$d_2 = \text{PPCM}(1, 2) = 2.$$

$$d_3 = \text{PPCM}(1, 2, 3) = 6.$$

$$d_4 = \text{PPCM}(1, 2, 3, 4) = 12.$$

Montrons $d_n < n!$ pour $n \geq 4$:

Comme $n!$ est un multiple commun de $1, \dots, n$ donc d_n divise $n!$, par suite $d_n \leq n!$.

II - Une Majoration plus fine

Q17. On sait que, pour tout $a_1, \dots, a_r$ dans $\llbracket 1, n \rrbracket$ avec $n \in \mathbb{N}^*$

$$\text{PPCM}(a_1, \dots, a_r) = \prod_{\substack{p \leq n \\ p \text{ premier}}} p^{\max_{1 \leq i \leq r} (v_p(a_i))}$$

Soit un nombre premier $p \leq n$, on a $v_p(d_n) = \max_{1 \leq m \leq n} v_p(m)$ et soit k_p le plus grand entier tel que $p^{k_p} \leq n$.

On a donc

$$k_p = v_p(p^{k_p}) \leq \max_{1 \leq m \leq n} v_p(m) = v_p(d_n).$$

Puisque, pour tout $m \leq n$ on a $p^{v_p(m)} \leq n$ alors $v_p(m) \leq k_p$, par suite $\max_{1 \leq m \leq n} v_p(m) \leq k_p$.

Ainsi $k_p = v_p(d_n)$ et
$$d_n = \prod_{\substack{p \leq n \\ p \text{ premier}}} p^{k_p}.$$

Q18. Soit un nombre premier $p \leq n$.

► Par définition, k_p est le plus grand entier tel que $p^{k_p} \leq n$, donc $p^{k_p} \leq n < p^{k_p+1}$, appliquons la fonction $\ln$:

$$k_p \ln p \leq \ln n < (k_p + 1) \ln p$$

Comme $p \geq 2$, $\ln p > 0$, donc

$$k_p \leq \frac{\ln n}{\ln p} < k_p + 1$$

Ainsi
$$k_p = \left\lfloor \frac{\ln n}{\ln p} \right\rfloor.$$

► D'après Q17 : $d_n = \prod_{p \leq n} p^{k_p}$ et on sait que $p^{k_p} \leq n$ donc .

$$d_n = \prod_{p \leq n} p^{k_p} \leq \prod_{p \leq n} n = n^{\pi(n)}.$$

Ainsi
$$d_n \leq n^{\pi(n)}.$$

Q19. D'après le Théorème des Nombres Premiers (admis dans Q13) :

$$\pi(x) \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} \frac{x}{\ln x}$$

Ce qui est équivalent à

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0 \mid n \geq N \Rightarrow \pi(n) \frac{\ln n}{n} \leq (1 + \varepsilon).$$

On a $d_n \leq n^{\pi(n)}$ donc $\ln d_n \leq \pi(n) \ln n$ et la relation précédente donne

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0 \mid n \geq N \Rightarrow \ln d_n \leq n(1 + \varepsilon).$$

Pour avoir $d_n \leq 3^n$, ce qui est équivalent à $\ln d_n \leq n \ln 3$, il suffit d'avoir $(1 + \varepsilon)n \leq n \ln 3$.

On prend donc $\varepsilon = \ln 3 - 1 > 0$, il existe N tel que , si $n \geq N$ alors

$$\pi(n) \ln n \leq n \ln 3$$

par suite

$$\ln d_n \leq \pi(n) \ln n \leq n \ln 3$$

Ainsi il existe N tel que , si $n \geq N$ alors $\boxed{d_n \leq 3^n}$.

Partie C - Un critère d'irrationalité

Q20. Soit $\alpha \geq 0$. Supposons par l'absurde que α est rationnel. Alors $\alpha = \frac{a}{b}$ avec $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}^*$.

On a

$$\left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| = \left| \frac{a}{b} - \frac{p_n}{q_n} \right| = \left| \frac{aq_n - bp_n}{bq_n} \right|.$$

Puisque $\frac{p_n}{q_n} \neq \alpha$, le numérateur $aq_n - bp_n$ est un entier non nul , donc $|aq_n - bp_n| \geq 1$. Ainsi,

$$\left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| \geq \frac{1}{bq_n}$$

On a $\left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{q_n}\right)$, ce qui signifie

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q_n \left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| = 0$$

Cependant, on a montré que

$$q_n \left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| \geq q_n \frac{1}{bq_n} = \frac{1}{b}.$$

Par passage à la limite en $+\infty$, on obtient $0 \geq \frac{1}{b}$. Ce qui est absurde , donc α est irrationnel.

Q21. Nombre de Liouville :

Soit $\beta = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{10^{n!}}$.

► On a $10^{n!} \geq 10^n$, et $0 < \frac{1}{10^{n!}} \leq \frac{1}{10^n}$. La série géométrique $\sum \left(\frac{1}{10}\right)^n$ converge , donc la série $\sum \frac{1}{10^{n!}}$ converge.

► Pour montrer que β est irrationnel, on utilise le critère de Q20.

Posons $q_N = 10^{N!}$ et

$$p_N = q_N \sum_{k=1}^N \frac{1}{10^{k!}} = \sum_{k=1}^N 10^{N!-k!}$$

On a $p_N, q_N \in \mathbb{N}^*$ et

$$\frac{p_N}{q_N} = \sum_{k=1}^N \frac{1}{10^{k!}} \underset{N \rightarrow +\infty}{\rightarrow} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{10^{k!}} = \beta$$

Comme

$$\beta - \frac{p_N}{q_N} = \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{10^{k!}} > 0$$

alors $\frac{p_N}{q_N} \neq \beta$.

Montrons que $\left| \beta - \frac{p_N}{q_N} \right| \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{q_N}\right)$.

On a

$$\left| \beta - \frac{p_N}{q_N} \right| = \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{10^{k!}} = \frac{1}{10^{(N+1)!}} \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{10^{k!-(N+1)!}}$$

Si $k \geq N+1$ on écrit

$$k! - (N+1)! = \sum_{j=N+2}^k (j! - (j-1)!)$$

comme $(j! - (j-1)!) \geq 1$ alors

$$k! - (N+1)! \geq k - (N+1)$$

ce qui donne

$$\left| \beta - \frac{p_N}{q_N} \right| \leq \frac{1}{10^{(N+1)!}} \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{10^{k-(N+1)}}$$

$$\text{Donc } 0 < \left| \beta - \frac{p_N}{q_N} \right| \leq \frac{10}{9} \frac{1}{10^{(N+1)!}}.$$

On en déduit que

$$q_N \left| \beta - \frac{p_N}{q_N} \right| \leq \frac{10}{9} \frac{1}{10^{N \cdot N!}} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$$

Ce qui signifie que $\left| \beta - \frac{p_N}{q_N} \right|_{N \rightarrow +\infty} = o\left(\frac{1}{q_N}\right)$.

D'après Q20, β est irrationnel.

Q22. La série de Riemann $\sum \frac{1}{k^\alpha}$ converge pour $\alpha > 1$, d'où l'existence de $\zeta(2)$.

Soit $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$. On a

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{d_n^2/k^2}{d_n^2} = \frac{\sum_{k=1}^n (d_n/k)^2}{d_n^2}$$

Posons $p_n = \sum_{k=1}^n (d_n/k)^2$. Tout entier $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ divise d_n , donc p_n est un entier.

Ainsi $S_n = \frac{p_n}{q_n}$ avec $p_n \in \mathbb{N}^*$ et $q_n = d_n^2$.

Q23. Examinons la condition : $q_n \left| \zeta(2) - \frac{p_n}{q_n} \right| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. On a

$$\left| \zeta(2) - \frac{p_n}{q_n} \right| = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$$

Comme l'application $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ est continue et décroissante sur $]0, +\infty[$, alors une comparaison série-intégrale donne :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \int_k^{k+1} \frac{1}{k^2} dx \geq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \int_k^{k+1} \frac{dx}{x^2} = \int_{n+1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{n+1}.$$

Donc

$$q_n \left| \zeta(2) - \frac{p_n}{q_n} \right| \geq \frac{d_n^2}{n+1}$$

Or n divise d_n , donc $d_n \geq n$ et $\frac{d_n^2}{n} \geq \frac{n^2}{n+1}$, par suite $\frac{d_n^2}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ et $q_n \left| \zeta(2) - \frac{p_n}{q_n} \right| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

On ne peut donc pas appliquer la question Q20 pour obtenir l'irrationalité de $\zeta(2)$.

Partie D - Calcul d'une intégrale double

Q24. Soit $y \in]0, 1[$ et $g_y(x) = \frac{x^r y^s}{1 - xy}$. On a $1 - xy \neq 0$ pour tout $(x, y) \in [0, 1] \times]0, 1[$, donc la fonction g_y est définie et continue sur le segment $[0, 1]$ donc elle est intégrable.

Q25. Montrer que $f_{r,s}(y) = \int_0^1 \frac{x^r y^s}{1 - xy} dx$ est continue et intégrable sur $]0, 1[$.

Soit $y \in]0, 1[$ fixé. Effectuons le changement de variable $t = xy$:

$$f_{r,s}(y) = y^{s-r-1} \int_0^y \frac{t^r}{1-t} dt$$

► Continuité :

La fonction $t \mapsto \frac{t^r}{1-t}$ est continue sur $]0, 1[$, donc la fonction $y \mapsto \int_0^y \frac{t^r}{1-t} dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$, par suite $f_{r,s}$ est continue sur $]0, 1[$.

► Intégrabilité sur $]0, 1[$:

Au voisinage de 0^+ on a :

$$\int_0^y \frac{t^r}{1-t} dt \leq \frac{1}{1-y} \int_0^y t^r dt = \frac{y^{r+1}}{(r+1)(1-y)}$$

donc

$$0 \leq f_{r,s}(y) \leq \frac{y^s}{(r+1)(1-y)}$$

Ainsi $f_{r,s}(y) \underset{y \rightarrow 0^+}{=} O(y^s)$ donc elle est intégrable au voisinage de 0 .

Au voisinage de 1^- on a :

$$\int_0^y \frac{t^r}{1-t} dt \leq y^r \int_0^y \frac{dt}{1-t} = -y^r \ln(1-y)$$

donc

$$0 \leq f_{r,s}(y) \leq -\ln(1-y)$$

On a donc $f_{r,s}(y) \underset{y \rightarrow 1^-}{=} o(\sqrt{1-y})$ par suite $f_{r,s}$ est intégrable au voisinage de 1 .

Ainsi $f_{r,s}$ est intégrable sur $]0, 1[$.

Q26. On a pour $y \in]0, 1[$

$$f_{r,s}(y) = y^{s-r-1} \int_0^y \frac{t^r}{1-t} dt = y^{s-r-1} \int_0^y \left(\sum_{k=0}^{\infty} t^{k+r} \right) dt$$

Le théorème d'intégration d'une série entière sur segment permet d'écrire :

$$f_{r,s}(y) = y^{s-r-1} \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^y t^{k+r} dt = y^{s-r-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^{k+r+1}}{k+r+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^{k+s}}{k+r+1}$$

Maintenant utilisons le théorème d'interversion de $\sum$ et $\int$ sur $]0, 1[$:

Posons $u_k : y \mapsto \frac{y^{k+s}}{k+r+1}$

Les fonctions u_k sont continues, intégrables sur $]0, 1[$ et $\sum u_k$ converge simplement, sur $]0, 1[$, vers $f_{r,s}$ qui est continue.

De plus

$$\int_{]0,1[} |u_k(y)| dy = \frac{1}{(r+k+1)(s+k+1)} \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{k^2}$$

donc $\sum \int_{]0,1[} |u_k(y)| dy$ converge. Le théorème s'applique et on a

$$\int_0^1 f_{r,s}(y) dy = \int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} u_k(y) dy = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^1 u_k(y) dy = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(r+k+1)(s+k+1)}$$

Ainsi $J_{r,s} = \boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(r+k+1)(s+k+1)}}.$

Remarquons que le résultat est valable aussi pour $r = s = 0$.

II - Une écriture sous forme de quotients

Q27. Considérons la fraction rationnelle $F(X) = \frac{1}{(X+r+1)(X+s+1)}$, qu'on décompose en éléments simples :

$$F(X) = \frac{a}{X+r+1} + \frac{b}{X+s+1}$$

$$\text{avec } a = \left[(X+r+1)F(X) \right]_{X=-r-1} = \frac{1}{s-r} \text{ et } b = \left[(X+s+1)F(X) \right]_{X=-s-1} = \frac{1}{r-s}.$$

$$\text{Ainsi on obtient pour } X = k : \boxed{\frac{1}{(r+k+1)(s+k+1)} = \frac{1}{r-s} \left(\frac{1}{s+k+1} - \frac{1}{r+k+1} \right)}.$$

Q28. D'après Q26 et Q27, on a

$$J_{r,s} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(r+k+1)(s+k+1)} = \frac{1}{r-s} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{s+k+1} - \frac{1}{r+k+1} \right)$$

Q29. La formule précédente s'écrit

$$(r-s) J_{r,s} = \sum_{k=0}^{+\infty} (u_k - u_{k+r-s}) \text{ avec } u_k = \frac{1}{s+k+1}.$$

$$\text{Considérons la somme partielle } S_n = \sum_{k=0}^n (u_k - u_{k+r-s}).$$

On a

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k - \sum_{k=0}^n u_{k+r-s} = \sum_{k=0}^n u_k - \sum_{k=r-s}^{n+r-s} u_k = \sum_{k=0}^{r-s-1} u_k - \sum_{j=n+1}^{n+r-s} u_j$$

La première somme ne dépend pas de n :

$$\sum_{k=0}^{r-s-1} u_k = \sum_{k=0}^{r-s-1} \frac{1}{s+k+1} = \sum_{j=s+1}^r \frac{1}{j}.$$

La deuxième somme comporte $r-s$ termes (un nombre fixe) et chaque terme est major par $\frac{1}{s+n+2}$, donc

$$\sum_{j=n+1}^{n+r-s} \frac{1}{s+j+1} \leq \sum_{j=n+1}^{n+r-s} \frac{1}{s+n+2} = \frac{r-s}{s+n+2}$$

donc elle tend vers 0 quand $n \rightarrow \infty$.

Finalement

$$(r-s) J_{r,s} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \sum_{k=s+1}^r \frac{1}{k}$$

$$\text{et } \boxed{J_{r,s} = \frac{1}{r-s} \sum_{k=s+1}^r \frac{1}{k}}.$$

Q30. D'après Q29,

$$J_{r,s} = \frac{1}{r-s} \left(\frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+2} + \cdots + \frac{1}{r} \right).$$

Mettons la somme entre parenthèses au même dénominateur. Le dénominateur commun naturel est

$L = \text{PPCM}(s+1, s+2, \dots, r)$. On a L divise $d_r = \text{PPCM}(1, 2, \dots, r)$.

Ainsi $J_{r,s} = \frac{p_{r,s}}{q_{r,s}}$ avec $q_{r,s} = (r-s)L$, comme $r-s$ divise d_r alors $q_{r,s}$ divise d_r^2 .

Partie E - Une démonstration de l'irrationalité de $\zeta(2)$

On définit sur $[0, 1]$ la fonction P_n par $P_n(x) = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^n(1-x)^n)$.

Q31. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a pour tout $k \geq 0$

$$\frac{d^n}{dx^n} x^{n+k} = (n+k)(n+k-1)\dots(k+1) x^k = \frac{(n+k)!}{k!} x^k$$

donc

$$P_n(x) = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \frac{(n+k)!}{k!} x^k = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \binom{n+k}{n} x^k$$

Le monôme de plus haut degré est $(-1)^n \binom{2n}{n} x^n$, ainsi P_n est un polynôme de degré n à coefficients entiers.

On pose dans la suite $P_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ et $(1-y)^n = \sum_{k=0}^n b_k y^k$, avec $a_k = (-1)^k \binom{n}{k} \binom{n+k}{n} \in \mathbb{Z}$ et $b_k = (-1)^k \binom{n}{k} \in \mathbb{Z}$.

Q32. Soit $(x, y) \in]0, 1[^2$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Posons $h(x, y) = \frac{(1-y)^n P_n(x)}{1-xy}$.

► Le numérateur de h est une fonction polynomiale, continue sur le compact $[0, 1]^2$, donc elle bornée sur $[0, 1]^2$. Soit C un de ses majorants, donc $|h(x, y)| \leq \frac{C}{1-xy}$, $\forall (x, y) \in]0, 1[^2$.

Soit $y \in]0, 1[$, la fonction $x \mapsto \frac{1}{1-xy}$ est intégrable sur $]0, 1[$ et $\int_0^1 \frac{1}{1-xy} dx = -\frac{1}{y} \ln(1-y)$.

Donc $\left| \int_0^1 h(x, y) dx \right| \leq -\frac{C}{y} \ln(1-y)$.

Comme

$$-\frac{\ln(1-y)}{y} \xrightarrow{y \rightarrow 0^+} 1 \text{ et } -\frac{\ln(1-y)}{y} \xrightarrow{y \rightarrow 1^-} o(\sqrt{1-y})$$

alors la fonction $y \mapsto -\frac{1}{y} \ln(1-y)$ est intégrable sur $]0, 1[$, par suite la fonction $y \mapsto \int_0^1 h(x, y) dx$ est intégrable sur $]0, 1[$.

Ce qui prouve l'existence de l'intégrale double $I_n = \int_0^1 \int_0^1 \frac{(1-y)^n P_n(x)}{1-xy} dx dy$.

► Ecrivons

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^1 \int_0^1 \frac{\left(\sum_{s=0}^n b_s y^s \right) \left(\sum_{r=0}^n a_r x^r \right)}{1-xy} dx dy \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \sum_{r=0}^n \sum_{s=0}^n a_r b_s \frac{x^r y^s}{1-xy} dx dy \\ &= \sum_{r=0}^n \sum_{s=0}^n a_r b_s \int_0^1 \int_0^1 \frac{x^r y^s}{1-xy} dx dy \\ &= \sum_{r=0}^n \sum_{s=0}^n a_r b_s J_{r,s}. \end{aligned}$$

Puis on sépare la somme selon que $r = s$ ou $r \neq s$:

$$I_n = \sum_{\substack{0 \leq r, s \leq n \\ r \neq s}} a_r b_s J_{r,s} + \sum_{r=0}^n a_r b_r J_{r,r}.$$

Q33. D'après Q30 et Q32

$$I_n = \sum_{\substack{0 \leq r, s \leq n \\ r \neq s}} a_r b_s \frac{p_{r,s}}{q_{r,s}} + \sum_{r=0}^n a_r b_r J_{r,r} \text{ et } q_{r,s} |d_r^2$$

On admet que :

$$J_{r,r} = \zeta(2) - \sum_{k=1}^r \frac{1}{k^2} \text{ si } r \geq 1$$

Si $r = 0$, $J_{0,0} = \zeta(2)$ (soit on l'admet aussi ou on refait les mêmes calculs de la question Q26).

D'après Q22, on a $\sum_{k=1}^r \frac{1}{k^2} = \frac{p'_r}{d_r^2}$ pour $r \geq 1$ et posons $p'_0 = 0$.

Donc

$$\begin{aligned}
I_n &= \sum_{\substack{0 \leq r, x \leq n \\ r \neq n}} a_r b_n \frac{p_{r,n}}{q_{r,n}} + \sum_{r=0}^n a_r b_r \zeta(2) - \sum_{r=0}^n a_r b_r \sum_{k=1}^r \frac{1}{k^2} \\
&= \sum_{\substack{0 \leq r, x \leq n \\ r \neq n}} a_r b_n \frac{p_{r,n} (d_n^2 / q_{r,x})}{d_n^2} + \sum_{r=0}^n a_r b_r \zeta(2) - \sum_{r=0}^n a_r b_r \frac{p'_r}{d_r^2} \\
&= \frac{1}{d_n^2} \left(\sum_{\substack{0 \leq r, x \leq n \\ r \neq x}} a_r b_s p_{r,x} (d_n^2 / q_{r,x}) - \sum_{r=0}^n a_r b_r p'_r (d_n^2 / q_{r,x}) + \sum_{r=0}^n a_r b_r (d_n^2 / d_r^2) \zeta(2) \right)
\end{aligned}$$

Posons

$$p_n = \sum_{\substack{0 \leq r, x \leq n \\ r \neq x}} a_r b_s p_{r,x} (d_n^2 / q_{r,x}) - \sum_{r=0}^n a_r b_r p'_r (d_n^2 / q_{r,x}) \in \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad q_n = \sum_{r=0}^n a_r b_r (d_n^2 / d_r^2) \in \mathbb{Z}$$

Ainsi $I_n = \frac{p_n + \zeta(2)q_n}{d_n^2}$ avec $p_n, q_n \in \mathbb{Z}$.

Remarquons que $q_n = \sum_{r=0}^n a_r b_r \binom{n}{r} \binom{n+r}{n} (d_n^2 / d_r^2) > 0$.

Q34. Par récurrence sur n .

Soit $y \in]0, 1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$, posons $I(y) = n! \int_0^1 \frac{P_n(x)}{1-xy} dx$ et $Q_n(x) = x^n(1-x)^n$.

On a $I(y) = \int_0^1 \frac{Q_n^{(n)}(x)}{1-xy} dx$, une intégration par partie donne

$$I(y) = \left[\frac{Q_n^{(n-1)}(x)}{1-xy} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{y Q_n^{(n-1)}(x)}{(1-xy)^2} dx$$

0 et 1 sont racines de Q_n d'ordre n et ils sont aussi racines de $Q_n^{(n-1)}$ d'ordre 1, donc

$$I(y) = -y \int_0^1 \frac{Q_n^{(n-1)}(x)}{(1-xy)^2} dx$$

Supposons pour un $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$I(y) = k! (-y)^k \int_0^1 \frac{Q_n^{(n-k)}(x)}{(1-xy)^{k+1}} dx$$

Montrons-le pour $k+1$.

Par une intégration par partie on a

$$I(y) = k! (-y)^k \left(\left[\frac{Q_n^{(n-k-1)}(x)}{(1-xy)^{k+1}} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{(k+1)y Q_n^{(n-k-1)}(x)}{(1-xy)^{k+2}} dx \right)$$

0 et 1 sont racines de Q_n d'ordre n et ils sont racines de $Q_n^{(n-k-1)}$ d'ordre $k+1$, donc

$$I(y) = (k+1)! (-y)^{k+1} \int_0^1 \frac{Q_n^{(n-k-1)}(x)}{(1-xy)^{k+2}} dx$$

et la relation est vraie pour $k+1$.

Pour $k = n$ on obtient :

$$I(y) = n! (-y)^n \int_0^1 \frac{Q_n^{(0)}(x)}{(1-xy)^{n+1}} dx = n! (-y)^n \int_0^1 \frac{x^n(1-x)^n}{(1-xy)^{n+1}} dx$$

Ainsi $\int_0^1 \frac{P_n(x)}{1-xy} dx = (-y)^n \int_0^1 \frac{x^n(1-x)^n}{(1-xy)^{n+1}} dx$.

Q35. On a

$$I_n = \int_0^1 (1-y)^n \left(\int_0^1 \frac{P_n(x)}{1-xy} dx \right) dy.$$

On remplace l'intégrale intérieure par le résultat de Q34.

$$I_n = (-1)^n \int_0^1 y^n (1-y)^n \left(\int_0^1 \frac{x^n (1-x)^n}{(1-xy)^{n+1}} dx \right) dy.$$

Ainsi
$$I_n = (-1)^n \int_0^1 \int_0^1 \frac{x^n (1-x)^n y^n (1-y)^n}{(1-xy)^{n+1}} dx dy.$$

Q36. Soit $f(x, y) = \frac{x(1-x)y(1-y)}{1-xy}$ pour $(x, y) \in]0, 1]^2$.

► Prolongement de f sur $[0, 1]^2$.

Limites aux bords de $]0, 1]^2$.

On a pour $a \in [0, 1[$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,a)} f(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (1,a)} f(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (a,0)} f(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (a,1)} f(x, y) = 0$$

Il reste la limite en $(1, 1)$; posons $x = 1 - h$ et $y = 1 - k$, h et k assez petits, alors

$$f(x, y) = \frac{hk(1-h)(1-k)}{1 - (1-h)(1-k)} = \frac{hk(1-h)(1-k)}{h+k-hk} = \frac{(1-h)(1-k)}{\frac{1}{h} + \frac{1}{k} - 1} \xrightarrow{(h,k) \rightarrow (0,0)} 0$$

donc $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} f(x, y) = 0$.

La fonction f est prolongeable par continuité sur le compact $[0, 1]^2$.

Donc f est bornée sur $[0, 1]^2$ et atteint ses bornes. Puisque f s'annule sur le bord de $[0, 1]^2$, alors elle atteint son maximum dans $]0, 1]^2$.

► Etude des extremums de f sur $]0, 1]^2$.

Pour trouver les points critiques, on calcule les dérivées partielles et on les annule. On a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{y(1-y)(1-2x+x^2y)}{(1-xy)^2} \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{x(1-x)(1-2y+y^2x)}{(1-xy)^2}$$

Soit $(x, y) \in]0, 1]^2$ est un point critique, donc

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$$

ce qui est équivalent à :

$$\begin{cases} 1 - 2x + x^2y = 0 & (E_1) \\ 1 - 2y + y^2x = 0 & (E_2) \end{cases}$$

La différence entre (E_2) et (E_1) donne

$$(y-x)(2-xy) = 0$$

Comme $0 < xy < 1$, donc $y = x$.

Substituons $y = x$ dans (E_1)

$$1 - 2x + x^3 = 0$$

Soit $P(x) = x^3 - 2x + 1$. On remarque que $P(1) = 0$, ce qui donne

$$P(x) = (x-1)(x^2+x-1)$$

Les racines de $P(x)$ sont donc 1 , $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, et $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$. La seule racine appartenant à l'intervalle $]0, 1[$ est $\alpha = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. Le seul point critique de f dans le domaine $]0, 1[^2$ est (α, α) avec $\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Donc c'est en ce point que le maximum est atteint.

Calculons la valeur de la fonction en ce point critique :

$$f(\alpha, \alpha) = \frac{[\alpha(1-\alpha)]^2}{1-\alpha^2}$$

Utilisons la relation $1-\alpha^2 = \alpha$.

$$f(\alpha, \alpha) = \frac{(\alpha(1-\alpha))^2}{\alpha} = \alpha(1-\alpha)^2$$

avec

$$\alpha(1-\alpha)^2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \frac{7-3\sqrt{5}}{2} = \frac{5\sqrt{5}-11}{2}$$

Par conséquent, pour tout $(x, y) \in]0, 1[^2$, $\boxed{\frac{x(1-x)y(1-y)}{1-xy} \leq \frac{5\sqrt{5}-11}{2}}$.

Étude du point critique avec la matrice Hessienne est compliquée, c'est pour cela qu'on a adopté cette méthode.

Un calcul informatisé donne

$$H_f(\alpha, \alpha) \approx \begin{pmatrix} -0.7639 & 0.2360 \\ 0.2360 & -0.7639 \end{pmatrix}, \quad rt - s^2 \approx 0.5278$$

Q37. D'après Q35 et Q36 on a

$$|I_n| = \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{x(1-x)y(1-y)}{1-xy} \right)^n \frac{1}{1-xy} dx dy.$$

et

$$|I_n| \leq \left(\frac{5\sqrt{5}-11}{2} \right)^n \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1-xy} dx dy.$$

L'intégrale double $\int_0^1 \int_0^1 \frac{dx dy}{1-xy}$ vaut $\zeta(2)$ (d'après Q26).

Donc $\boxed{|I_n| \leq \zeta(2) \left(\frac{5\sqrt{5}-11}{2} \right)^n}$.

Q38. D'après Q33 on a $|p_n + \zeta(2)q_n| = d_n^2 |I_n|$, donc

$$|p_n + \zeta(2)q_n| \leq \zeta(2) d_n^2 \left(\frac{5\sqrt{5}-11}{2} \right)^n$$

D'après Q19, il existe N tel que pour $n \geq N$, $d_n \leq 3^n$.

Donc pour $n \geq N$,

$$|p_n + \zeta(2)q_n| \leq \zeta(2) 3^{2n} \left(\frac{5\sqrt{5}-11}{2} \right)^n = \zeta(2) \left(9 \frac{5\sqrt{5}-11}{2} \right)^n$$

Comme $9 \frac{5\sqrt{5}-11}{2} \leq \frac{5}{6}$ alors

$$|p_n + \zeta(2)q_n| \leq \zeta(2) \left(\frac{5}{6} \right)^n$$

La fonction $g : (x, y) \mapsto \frac{x^n(1-x)^n y^n(1-y)^n}{(1-xy)^{n+1}}$ est continue et positive strictement sur $]0, 1[^2$ donc

$$|I_n| = \int_0^1 \int_0^1 g(x, y) dx dy \geq \int_{1/4}^{1/2} \int_{1/4}^{1/2} g(x, y) dx dy \geq \int_{1/4}^{1/2} \int_{1/4}^{1/2} \frac{(1/4)^{2n} (1/2)^{2n}}{(1 - (1/4)^2)^{n+1}} dx dy \geq \frac{1}{60^{n+1}}$$

Ainsi il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geq N$, $\boxed{0 < |p_n + \zeta(2)q_n| \leq \zeta(2) \left(\frac{5}{6} \right)^n}$.

Q39. On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^n = 0$ donc $\left|\zeta(2) + \frac{p_n}{q_n}\right|_{n \rightarrow \infty} = o\left(\frac{1}{q_n}\right)$.
Comme $q_n \in \mathbb{Z}^*$ alors $|q_n| \geq 1$ et

$$\left|\zeta(2) + \frac{p_n}{q_n}\right| \leq \zeta(2) \left(\frac{5}{6}\right)^n \frac{1}{|q_n|} \leq \zeta(2) \left(\frac{5}{6}\right)^n$$

par suite $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-p_n}{q_n} = \zeta(2)$ (des question Q31 et Q33 on a $q_n = \sum_{r=0}^n a_r b_r \binom{n}{r} \binom{n+r}{n} (d_n^2/d_r^2) > 0$).

D'après Q20 $\zeta(2)$ est un nombre irrationnel. ,

Q40. On admet, uniquement dans cette dernière question ! (La prochaine question est prévue en 2026), que $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$.

Supposons par l'absurde que π est rationnel. Alors $\pi = \frac{a}{b}$ pour certains $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$.

Alors $\pi^2 = \frac{a^2}{b^2}$ et $\zeta(2) = \frac{a^2}{6b^2} \in \mathbb{Q}$, ceci contredit le résultat de Q39.

Donc π est un nombre irrationnel.

L'irrationalité de π a été prouvée par Lambert en 1761. Celle de π^2 par Legendre en 1794.