

EPREUVE DES PETITES MINES, MPSI, 1999

EXTRAIT

Premier problème

$\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels. $\mathbb{R}_n[X]$ désigne l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n . Si P est un polynôme, on notera P' son polynôme dérivé. Si P est un polynôme on notera également P sa fonction polynôme associée.

Études d'endomorphismes donnés par leur matrice

1. Soit u et v deux réels. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ ayant pour matrice sur la base canonique $(1, X, X^2)$ la matrice A suivante :

$$A = \begin{pmatrix} -u & v & 0 \\ -2 & 0 & 2v \\ 0 & -1 & u \end{pmatrix}$$

- (a) Calculer le déterminant de f en justifiant votre réponse.
(b) Déterminer une base du noyau de f .
(c) Déterminer une base de l'image de f .
2. Soit w un réel. Soit g l'endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$ ayant pour matrice sur la base $(1, X, X^2, X^3)$ la matrice B suivante :

$$B = \begin{pmatrix} -3 & w & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 2w & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 3w \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

- (a) Calculer le déterminant de g en justifiant votre réponse. On notera w_0 la valeur qui annule ce déterminant.
(b) Déterminer lorsque $w = w_0$ une base du noyau de g .

Définition d'une application linéaire, exemples et propriétés

Soit n un entier supérieur ou égal à 2, Q un polynôme de degré 2 et φ l'application définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par :

$$\varphi(P) = 2P'Q - nPQ'$$

1. Étude de cas particuliers

- (a) Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
(b) Soit u et v deux réels. On suppose dans cette question que $n = 2$ et que $Q = X^2 + uX + v$.
i. Déterminer la matrice de φ sur la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
ii. Déterminer le noyau de φ en fonction de Q .
(c) Soit w un réel. On suppose dans cette question que $n = 3$ et que $Q = X^2 + 2X + w$.
i. Déterminer la matrice de φ sur la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.
ii. Déterminer suivant les valeurs de w le noyau de φ .

2. Étude du cas général

- (a) On suppose que Q n'admet pas de racine double.
i. Que peut-on dire du pgcd de Q et de Q' ?
ii. Dédurre de la question précédente que si P est un polynôme non nul appartenant au noyau de φ alors Q divise P .
iii. Montrer que si P est un polynôme non nul appartenant au noyau de φ , il existe un entier k non nul et un polynôme R non nul, tels que $P = RQ^k$ et tels que Q ne divise pas R .
iv. Dédurre de la question précédente que si le noyau de φ n'est pas réduit au polynôme nul alors n est pair.
v. Déterminer selon les valeurs de n le noyau de φ .
(b) On suppose que Q possède une racine double α .
i. Montrer que si P est un polynôme non nul appartenant au noyau de φ alors α est racine de P .
ii. Donner le noyau de φ . (On pourra utiliser l'ordre de multiplicité de la racine α .)
(c) Dans cette question, on supposera n impair.
Soit P un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$. Montrer qu'il existe un polynôme R de $\mathbb{R}_n[X]$ unique tel que : $P = (X^2 + 1)R' - nXR$. Justifier que l'application $\psi : P \mapsto R$ ainsi définie est linéaire.

FIN EXTRAIT

