

Extrait du Problème N°1

Partie II

Une démonstration probabiliste du théorème de Stone-Weierstrass

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Soit S_n une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n et x , $x \in [0, 1]$, on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n = \frac{S_n}{n}$.
 - (a) Déterminer $E(X_n)$ et $V(X_n)$ respectivement l'espérance et la variance de X_n .
 - (b) Justifier que, pour tout $\delta > 0$, $P(|X_n - x| \geq \delta) \leq \frac{1}{4n\delta^2}$.
2. On introduit la variable aléatoire $Y_n = f(X_n)$ et on pose pour tout $x \in [0, 1]$, $C_n(f)(x) = E(Y_n)$. Pour la suite de cette question, on se donne un réel $\varepsilon > 0$.
 - (a) Vérifier que $x \mapsto C_n(f)(x)$ est une fonction polynomiale définie sur $[0, 1]$.
 - (b) D'après le théorème de Heine, comme f est continue sur $[0, 1]$, alors il existe $\beta > 0$ tel que, pour tout $(x_1, x_2) \in [0, 1] \times [0, 1]$, $|x_1 - x_2| \leq \beta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. (On ne vous demande pas de redémontrer ce résultat).

i. Montrer que
$$\left| \sum_{\left| \frac{k}{n} - x \right| \leq \beta} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right) P\left(X_n = \frac{k}{n}\right) \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

ii. Montrer que
$$\left| \sum_{\left| \frac{k}{n} - x \right| > \beta} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right) P\left(X_n = \frac{k}{n}\right) \right| \leq \frac{M}{2n\beta^2}, \text{ avec } M = \sup_{t \in [0, 1]} |f(t)|.$$