Très Classique

M. que $O_n(\mathbb{R})$ est un compact de l'evn $M_n(\mathbb{R})$

Sol :

$M_n(\mathbb{R})$ est de dim finie, alors il suffit de montrer que $O_n(\mathbb{R})$ est fermé borné.

1) M. que $O_n(\mathbb{R})$ est une partie bornée de $M_n(\mathbb{R})$

$$O_n(\mathbb{R}) \underset{\text{rappel}}{=} \{A \in M_n(\mathbb{R}) / {}^tA.A = I_n\}$$

$$tr({}^tA.A) = (\|A\|_2)^2$$

à savoir

Scanned with CamScanner

Soit $A \in O_n(\mathbb{R})$.

$\|A\|_2 = \sqrt{tr({}^tA.A)}$

$= \sqrt{tr(I_n)}$

$= \sqrt{n}$

$\| \ \|A\|_2 \leq C$

↳ ne dépend pas de A

Ainsi :

$\boxed{\forall A \in O_n(\mathbb{R}), \|A\|_2 = \sqrt{n}} \ \left(\leq \underbrace{\sqrt{n}}_{C} \right)$

Donc $\boxed{O_n(\mathbb{R}) \text{ est borné}}$.

---

2) Fermé (après).

$$A = (A_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\sum_{1 \leq i,j \leq n} A_{ij}^2}$$

rappel

$$tr({}^tA \cdot A) = (\|A\|_2)^2 \text{ ; En effet :}$$

$$tr({}^tA \cdot A) = \sum_{i=1}^{n} ({}^tA \cdot A)_{ii}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} ({}^tA)_{ij} \cdot (A)_{ji} \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} A_{ji}^2 \right)$$

$$= \sum_{1 \leq i,j \leq n} A_{ji}^2 = (\|A\|_2)^2 \quad \boxed{\text{Fin}}$$

Exercice

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Montrer via la définition que $\lim\limits_{\|(x,y)\| \to +\infty} f(x,y) = 0$

(Sans déf - Directly)

$$\|(x,y)\|_2 \longrightarrow +\infty$$

$$\Rightarrow \|(x,y)\|_2^2 = x^2+y^2 \longrightarrow +\infty$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x^2+y^2} \xrightarrow[\|(x,y)\|_2 \to]{} 0$$

$$= f(x,y)$$

$$\Rightarrow \lim_{\|(x,y)\|_2 \to +\infty} f(x,y) = 0$$

$\square$