

Ce qui est marqué en jaune est corrigé à présent.
Je corrigerais le reste après.

Matrices et Applications Linéaires

Exercice 1

Dans chacun des cas suivants, déterminer la matrice de l'application linéaire f relativement aux bases canoniques :

- 1) $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) & \mapsto (2x - y, x + y, x) \end{cases}$
- 2) $f : \begin{cases} \mathbb{R}_2[X] & \rightarrow \mathbb{R}_3[X] \\ P & \mapsto (X + 1)P - X^2 P' \end{cases}$
- 3) $f : \begin{cases} \mathbb{R}_3[X] & \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ P & \mapsto (P(0), P'(1), P''(2)) \end{cases}$

Exercice 2

Considérons l'application f définie par $f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \mapsto (z, y, x) \end{cases}$.

B_c est la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $B = (u_1, u_2, u_3)$, où $\begin{cases} u_1 = (1, 0, 1) \\ u_2 = (0, 1, 0) \\ u_3 = (1, 0, -1) \end{cases}$.

- 1) Déterminer la matrice de f dans la base B_c .
- 2) i) Montrer que B est une base de $\mathbb{R}^3$.
ii) Déterminer la matrice de f dans la base B .

Exercice 3

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ dans la base canonique.

- 1) Justifier que f est une symétrie.
- 2) Déterminer ses éléments caractéristiques ; base et direction.

Exercice 4

Considérons la famille $S = (\cos, \sin, \exp)$ de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
Notons $E = \text{vect}(\cos, \sin, \exp)$.

- 1) Montrer que S est une base de l'espace E .
- 2) Considérons l'application φ définie sur $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ par $\varphi : f \mapsto f'$.
 - i) Montrer que φ définit un endomorphisme de E .
 - ii) Déterminer la matrice de φ dans la base S .

Exercice 5

E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ et f un endomorphisme de E nilpotent d'indice n .

- 1) Montrer l'existence de $x_0 \in E$ tel que la famille $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ soit une base de E .
- 2) Déterminer la matrice de f dans cette base.
- 3) Déterminer la matrice de f dans la base $(f^{n-1}(x_0), \dots, f(x_0), x_0)$

Exercice 6

Considérons la matrice $A = \begin{pmatrix} -5 & 3 & -3 \\ -15 & 9 & -7 \\ -9 & 5 & -3 \end{pmatrix}$.

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé.

Considérons la famille $B = (u_1, u_2, u_3)$ où $\begin{cases} u_1 = (1, 1 - 1) \\ u_2 = (0, 1, 1) \\ u_3 = (1, 2, 1) \end{cases}$

- 1) Montrer que B est une base de $\mathbb{R}^3$.
- 2) Déterminer la matrice de f dans cette base.
- 3) En déduire A^n , pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- 4) Que vaut $\text{mat}_{B_c}(f^n)$? où $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 7

Notons B la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $S = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ où $\begin{cases} \varepsilon_1 = (1, 1, 1) \\ \varepsilon_2 = (1, -1, 0) \\ \varepsilon_3 = (1, 0, 1) \end{cases}$.

Considérons la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ ayant A comme matrice dans la base B .

- 1) Montrer que S est une base de $\mathbb{R}^3$.
- 2) Chercher la matrice de f dans la base S .
- 3) Déterminer $\ker(f)$ et $\text{Im}(f)$; expliciter pour chacun une base.

Exercice 8

Posons $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \text{diag}(0, 1, 2)$.

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension 3 et $B = (e_1, e_2, e_3)$ en est une base.

Soit $f \in L(E)$ tel que $\text{mat}_B(f) = A$.

- 1) Déterminer une base $S = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ de E telle que $\text{mat}_S(f) = D$.
- 2) Déterminer la matrice inversible P telle que $A = PDP^{-1}$.
- 3) Calculer P^{-1} .
- 4) En déduire A^n , pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- 5) On considère maintenant les suites réelles $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par $x_0 = 1, y_0 = -1, z_0 = -1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} x_{n+1} &= 4x_n - 2y_n - 2z_n \\ y_{n+1} &= x_n - z_n \\ z_{n+1} &= 3x_n - 2y_n - z_n \end{cases}$$

Notons $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$.

- i) Ecrire un programme Python permettant de calculer x_n, y_n et z_n , pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- ii) Justifier que

$$\forall n \in \mathbb{N}, X_{n+1} = AX_n$$
- iii) En déduire le terme général de chacune des suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- iv) Vérifier que la valeur de x_{19} donnée via ce programme Python coïncide avec celle donnée par le terme général ainsi trouvé.

Exercice 9

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- 1) Etablir que $\mathbb{R}^3 = \text{Ker}(u) \oplus \text{Im}(u)$.
- 2) L'endomorphisme u est-il un projecteur ?
- 3) Déterminer toutes les puissances de A .

CORRECTION

CORRECTION

CORRECTION

Exercice 3

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ dans la base canonique.

- 1) Justifier que f est une symétrie.
- 2) Déterminer ses éléments caractéristiques ; base et direction.

Solution

1) Il s'agit de vérifier que $f^2 = \text{id}_{\mathbb{R}^3}$.

On a $A = \text{mat}_{B_c}(f)$; où B_c la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Abs il suffit de vérifier que $A^2 = I_3$,

« On fait les calculs et c'est tout »

2) i) Déterminons la base F de la symétrie f :

Rappel

$F = \ker(f - \text{id})$ la base de la symétrie f .
 $G = \ker(f + \text{id})$ la direction de f .

Trouvons $F = \text{vect}(\quad) :$

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On a :

$$\begin{aligned} (x, y, z) \in F &\Leftrightarrow (f - \text{id}_{\mathbb{R}^3})(x, y, z) = 0_{\mathbb{R}^3} \\ &\Leftrightarrow (A - I_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$A = \text{mat}_{B_c}(f)$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -x - 2y - z \\ 0 \\ -x - 2y - z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow -x - 2y - z = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -2y - z$$

$$\Leftrightarrow (x, y, z) = (-2y - z, y, z)$$

$$\Leftrightarrow (x, y, z) = y(-2, 1, 0) + z(-1, 0, 1)$$

$$(x, y, z) \in F \Leftrightarrow (x, y, z) \in \text{vect}((-2, 1, 0); (-1, 0, 1))$$

d'où :

$$F = \text{vect}((-2, 1, 0); (-1, 0, 1))$$

2) ii) Déterminons la direction G de la symétrie :

On procède comme au 2)i), on trouve :

$$G = \text{vect}((1, 0, 1))$$

Fin Exercice 3

Exercice 5

E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ et f un endomorphisme de E nilpotent d'indice n .

- 1) Montrer l'existence de $x_0 \in E$ tel que la famille $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ soit une base de E .
- 2) Déterminer la matrice de f dans cette base.
- 3) Déterminer la matrice de f dans la base $(f^{n-1}(x_0), \dots, f(x_0), x_0)$

Solution

- 1) Très classique bonne question.
 Vue et solutionnée dans : « Espaces vectoriels de dimensions finies »

Exercice 8.

- 2) Déterminer la matrice de f dans cette base.

Notons $B = (x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$.

On veut $\text{mat}_B(f)$.

Autrement dit, il s'agit de remplir la matrice :

$$\text{mat}_B(f) = \begin{matrix} & \begin{matrix} f(x_0) & f(f(x_0)) & \dots & f(f^{n-2}(x_0)) & f(f^{n-1}(x_0)) \end{matrix} \\ \begin{matrix} x_0 \\ f(x_0) \\ \vdots \\ f^{n-2}(x_0) \\ f^{n-1}(x_0) \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & & & \\ 0 & 1 & & & \\ 0 & 0 & \ddots & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

3) Déterminer la matrice de f dans la base $(f^{n-1}(x_0), \dots, f(x_0), x_0)$

Notons $S = (f^{n-1}(x_0), f^{n-2}(x_0), \dots, f(x_0), x_0)$.

On veut $\text{mat}_S(f)$.

Autrement dit, il s'agit de remplir la matrice :

$$\text{mat}_S(f) = \begin{pmatrix} f(f^{n-1}(x_0)) & f(f^{n-2}(x_0)) & \dots & f(f(x_0)) & f(x_0) \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Fin Exercice 5

Exercice 6

Considérons la matrice $A = \begin{pmatrix} -5 & 3 & -3 \\ -15 & 9 & -7 \\ -9 & 5 & -3 \end{pmatrix}$.

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé.

Considérons la famille $B = (u_1, u_2, u_3)$ où $\begin{cases} u_1 = (1, 1 - 1) \\ u_2 = (0, 1, 1) \\ u_3 = (1, 2, 1) \end{cases}$

- 1) Montrer que B est une base de $\mathbb{R}^3$.
- 2) Déterminer la matrice de f dans cette base.
- 3) En déduire A^n , pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- 4) Que vaut $mat_{B_c}(f^n)$? où $n \in \mathbb{N}$.

Solution

1) OK

2) $mat_B(f) = (?)$

On a $B = (u_1, u_2, u_3)$.

On veut remplir la matrice $mat_B(f) = \begin{matrix} & f(u_1) & f(u_2) & f(u_3) \\ \begin{matrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \end{matrix}$

$f(u_1) = ?$

Notons B_c la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

On a $mat_B(f) = A = \begin{pmatrix} -5 & 3 & -3 \\ -15 & 9 & -7 \\ -9 & 5 & -3 \end{pmatrix}$

$$mat_{B_c}(f(u_1)) = mat_{B_c}(f) \times mat_{B_c}(u_1) = \begin{pmatrix} -5 & 3 & -3 \\ -15 & 9 & -7 \\ -9 & 5 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

D'où $\boxed{f(u_1) = (1, 1, -1)}$

$\Rightarrow f(u_1) = u_1$

$$\begin{cases} u_1 = (1, 1 - 1) \\ u_2 = (0, 1, 1) \\ u_3 = (1, 2, 1) \end{cases}$$

$$\underline{f(U_2) = ?}$$

$$\underset{B_C}{\text{mat}}(f(U_2)) = \underset{B_C}{\text{mat}}(f) \times \underset{B_C}{\text{mat}}(U_2) = \begin{pmatrix} -5 & 3 & -3 \\ -15 & 9 & -7 \\ -9 & 5 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{D}' \text{ où } \boxed{f(U_2) = (0, 2, 2)}$$

$$\Rightarrow \boxed{f(U_2) = 2U_2}$$

$$\begin{cases} u_1 = (1, 1, -1) \\ u_2 = (0, 1, 1) \\ u_3 = (1, 2, 1) \end{cases}$$

$$\underline{f(U_3) = ?}$$

$$\underset{B_C}{\text{mat}}(f(U_3)) = \underset{B_C}{\text{mat}}(f) \times \underset{B_C}{\text{mat}}(U_3) = \begin{pmatrix} -5 & 3 & -3 \\ -15 & 9 & -7 \\ -9 & 5 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{D}' \text{ où } \boxed{f(U_3) = (-2, -4, -2)}$$

$$\Rightarrow \boxed{f(U_3) = -2U_3}$$

$$\begin{cases} u_1 = (1, 1, -1) \\ u_2 = (0, 1, 1) \\ u_3 = (1, 2, 1) \end{cases}$$

$$\text{Enfin, avec } \begin{cases} f(U_1) = U_1 \\ f(U_2) = 2U_2 \\ f(U_3) = -2U_3 \end{cases}, \text{ on tire que:}$$

$$\underset{B}{\text{mat}}(f) = \begin{matrix} & \begin{matrix} f(U_1) & f(U_2) & f(U_3) \end{matrix} \\ \begin{matrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \end{matrix} = \text{diag}(1, 2, -2)$$

3) En déduire A^n , pour tout $n \in \mathbb{N}$.

La question est très classique. Voyons comment :

$$\text{On a : } \begin{cases} \text{mat}_{B_c}(f) = A \\ \text{mat}_B(f) = D = \text{diag}(1, 2, -2) \end{cases}$$

Et on sait d'après formule de changement de base que :

$$\text{mat}_{B_c}(f) = P_{B_c, B} \times \text{mat}_B(f) \times P_{B, B_c}$$

$$\text{Donc } \boxed{A = P \cdot D \cdot P^{-1}}, \text{ où } P = P_{B_c, B}$$

Ainsi :



$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, A^n = P \cdot D^n \cdot P^{-1}}$$

$$\text{Or } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \text{ diagonale.}$$

$$\text{Alors } D^n = \begin{pmatrix} 1^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^n \end{pmatrix}$$

$$P = P_{B_c, B} = \text{mat}_{B_c}(B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Reste à calculer P^{-1} .

$$\begin{cases} u_1 &= (1, 1 - 1) \\ u_2 &= (0, 1, 1) \\ u_3 &= (1, 2, 1) \end{cases}$$

Inversons P avec la méthode de Gauss-Jordan :

$$\overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}^P \quad \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}^{I_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} L_3 \leftarrow L_3 - L_2$$

$\hookrightarrow$ on passe à annuler
sa partie supérieure

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \end{array}$$

$\hookrightarrow$ C'est I_3 $\hookrightarrow$ C'est donc P^{-1}

Donc $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}$, On a :

$$A^n = P \cdot D^n \cdot P^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & (-2)^n \\ 1 & 2^n & 2 \cdot (-2)^n \\ -1 & 2^n & (-2)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, A^n = \begin{pmatrix} -1 + 2 \cdot (-2)^n & 1 - (-2)^n & -1 + (-2)^n \\ -1 - 3 \cdot 2^n + 4 \cdot (-2)^n & 1 + 2 \cdot 2^n - 2 \cdot (-2)^n & -1 - 2^n + 2 \cdot (-2)^n \\ 1 - 3 \cdot 2^n + 2 \cdot (-2)^n & -1 + 2 \cdot 2^n - (-2)^n & 1 - 2^n + (-2)^n \end{pmatrix}$$

4) Que vaut $\text{mat}_{B_c}(f^n)$? où $n \in \mathbb{N}$.

On a :

$$\text{mat}_{B_c}(f^n) = \left(\text{mat}_{B_c}(f) \right)^n$$

$$= A^n$$

$$= \begin{pmatrix} -1 + 2 \cdot (-2)^n & 1 - (-2)^n & -1 + (-2)^n \\ -1 - 3 \cdot 2^n + 4 \cdot (-2)^n & 1 + 2 \cdot 2^n - 2 \cdot (-2)^n & -1 - 2^n + 2 \cdot (-2)^n \\ 1 - 3 \cdot 2^n + 2 \cdot (-2)^n & -1 + 2 \cdot 2^n - (-2)^n & 1 - 2^n + (-2)^n \end{pmatrix}$$

Fin Exercice 6

Exercice 7

Notons B la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $S = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ où
$$\begin{cases} \varepsilon_1 &= (1, 1, 1) \\ \varepsilon_2 &= (1, -1, 0) \\ \varepsilon_3 &= (1, 0, 1) \end{cases}.$$

Considérons la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ ayant A comme matrice dans la base B .

- 1) Montrer que S est une base de $\mathbb{R}^3$.
- 2) Chercher la matrice de f dans la base S .
- 3) Déterminer $\ker(f)$ et $\text{Im}(f)$; expliciter pour chacun une base.

Solution :

1) OK

2) On veut remplir $\text{mat}_S(f) = \begin{matrix} & f(\varepsilon_1) & f(\varepsilon_2) & f(\varepsilon_3) \\ \begin{matrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} \end{matrix}$

$f(\varepsilon_1) = ?$

$$\text{mat}_B(f(\varepsilon_1)) = \text{mat}_B(f) \times \text{mat}_B(\varepsilon_1)$$

$$S = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \text{ où } \begin{cases} \varepsilon_1 &= (1, 1, 1) \\ \varepsilon_2 &= (1, -1, 0) \\ \varepsilon_3 &= (1, 0, 1) \end{cases}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Donc } f(\varepsilon_1) = (1, 1, 1) = \varepsilon_1$$

$f(\varepsilon_2) = ?$

$$\text{mat}_B(f(\varepsilon_2)) = \text{mat}_B(f) \times \text{mat}_B(\varepsilon_2)$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$S = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \text{ où } \begin{cases} \varepsilon_1 = (1, 1, 1) \\ \varepsilon_2 = (1, -1, 0) \\ \varepsilon_3 = (1, 0, 1) \end{cases}$$

Donc $f(\varepsilon_2) = (2, -2, 0) = 2\varepsilon_2$

$f(\varepsilon_3) = ?$

$$\text{mat}_B(f(\varepsilon_3)) = \text{mat}_B(f) \times \text{mat}_B(\varepsilon_3)$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$S = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \text{ où } \begin{cases} \varepsilon_1 = (1, 1, 1) \\ \varepsilon_2 = (1, -1, 0) \\ \varepsilon_3 = (1, 0, 1) \end{cases}$$

Donc $f(\varepsilon_3) = (0, 0, 0) = 0$

Avec $\begin{cases} f(\varepsilon_1) = \varepsilon_1 \\ f(\varepsilon_2) = 2\varepsilon_2 \\ f(\varepsilon_3) = 0 \end{cases}$ on obtient

$$\text{mat}_S(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3) Déterminer $\ker(f)$ et $\text{Im}(f)$; expliciter pour chacun une base.

On a : $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$, B la base canonique de $\mathbb{R}^3$

$$\text{mat}_S(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ;$$

$$\text{mat}_B(f) = A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$S = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \text{ où } \begin{cases} \varepsilon_1 = (1, 1, 1) \\ \varepsilon_2 = (1, -1, 0) \\ \varepsilon_3 = (1, 0, 1) \end{cases}$$

i) $\ker(f) = ?$

Soit $X = x \varepsilon_1 + y \varepsilon_2 + z \varepsilon_3 \in \mathbb{R}^3$. On a :

$$X \in \ker(f) \Leftrightarrow f(X) = 0$$

$$\Leftrightarrow \underset{S}{\text{mat}(f)} \times \underset{S}{\text{mat}(X)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow X = z \varepsilon_3$$

$$\Leftrightarrow X \in \text{Vect}(\varepsilon_3)$$

Ainsi

$$X \in \ker(f) \Leftrightarrow X \in \text{Vect}(\varepsilon_3)$$

D'où

$$\ker(f) = \text{Vect}(\varepsilon_3)$$

(ε_3) est une base de $\ker(f)$

NB:

On peut travailler avec $\underset{B}{\text{mat}(f)} = A \dots$ mais avec $\underset{S}{\text{mat}(f)}$ qui est diagonale, c'est plus rapide comme vous avez noté.

ii) $\text{Im}(f) = ?$

D'abord, d'après le théorème du rang, on a :

$$\underbrace{\dim(\mathbb{R}^3)}_{=3} = \underbrace{\dim(\ker(f))}_{=1} + \dim(\text{Im}(f))$$

$\hookrightarrow$ d'après i)

D'où $\dim(\text{Im}(f)) = 2$

Déterminons maintenant une base de $\text{Im}(f)$:

Il suffit alors de déterminer une famille de 2 vecteurs de $\text{Im}(f)$ qui sont linéairement indépendants, du fait que $\dim(\text{Im}(f)) = 2$.

On a: $\text{mat}_B(f) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{cases} f(e_1) = (3, -1, 1) \in \text{Im}(f) \\ f(e_2) = (1, 1, 1) \in \text{Im}(f) \end{cases}$; où $B = (e_1, e_2, e_3)$.

et vu que $(3, -1, 1)$ et $(1, 1, 1)$ sont linéairement indépendants puis que non colinéaires (clair)

D'où

$\text{Im}(f) = \text{vect}((3, -1, 1); (1, 1, 1))$
 $((3, -1, 1); (1, 1, 1))$ en est une base

Fin

Remarque

On peut considérer :

$\text{mat}_S(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $S = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ où $\begin{cases} \varepsilon_1 = (1, 1, 1) \\ \varepsilon_2 = (1, -1, 0) \\ \varepsilon_3 = (1, 0, 1) \end{cases}$

Ainsi :

$f(\varepsilon_1) = \varepsilon_1 \in \text{Im}(f)$
 $f(\varepsilon_2) = 2\varepsilon_2 \in \text{Im}(f)$

D'où

$(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ est une famille de $\text{Im}(f)$
 Elle est libre comme sous-famille de S
 qui est libre.

D'où

$$\text{Im}(f) = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ en est une base

Fin

$$S = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \text{ où } \begin{cases} \varepsilon_1 = (1, 1, 1) \\ \varepsilon_2 = (1, -1, 0) \\ \varepsilon_3 = (1, 0, 1) \end{cases}$$

NB:

On a deux bases différentes.

Fin exercice 7

FIN