Réduction d'endomorphismes et de matrices

Résumé Lacunaire

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

I) Sous-espaces stables – Endomorphisme induit

1) Sous-espaces stables

Déf

Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et F sev de E.

F est dit stable par f si et ssi :

$\forall x \in F$, [redacted]

NB

Ça veut dire encore que : $f(F)$ [redacted] F

Prop

Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et F sev de E.

Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une base de F. On a :

(F stable par f) $\Longleftrightarrow$ ($\forall i \in [\![1, p]\!]$, [redacted])

Corollaire

Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et $e \in E \setminus \{0\}$. On a :

($\mathrm{vect}(e)$ stable par f) $\Longleftrightarrow$ ($\exists \lambda \in \mathbb{K}$, $f(e) =$ [redacted])

Prop

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

L'intersection (resp la somme) de deux sev stables par f est [redacted]

Prop

Soient f et $g \in \mathcal{L}(E)$.

1) $\mathrm{Im}(f)$, $\ker(f)$, $\mathrm{Im}(f-\lambda I_E)$ et $\ker(f-\lambda I_E)$ sont stables par [redacted]
2) Si $fg=gf$ alors $\mathrm{Im}(f)$ et $\ker(f)$ sont stables par [redacted]

2) Interprétation matricielle de la stabilité

Ici E sera de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$.

Prop

Soient F et G deux sev supplémentaires de E ($E=F\oplus G$).

Soit $B = B_F \cup B_G$ une base adaptée à la décomposition $E=F\oplus G$.

Les propositions suivantes sont équivalentes :

1) F stable par f.
2) $\mathrm{mat}_B(f)$ est de la forme : [redacted]

Prop

Soient F et G deux sev supplémentaires de E ($E=F\oplus G$).

Soit $B = B_F \cup B_G$ une base adaptée à la décomposition $E=F\oplus G$.

Les propositions suivantes sont équivalentes :

1) F et G sont stables par f.

2) $\underset{B}{\text{mat}}(f)$ est de la forme : [redacted]

Prop

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

Soient $F_1, \dots, F_s$ des sev supplémentaires de E.

Soit $B = B_1 \sqcup \dots \sqcup B_s$ une base adaptée à la décomposition

$E = F_1 \oplus \dots \oplus F_s$.

Les propositions suivantes sont équivalentes :

1) $F_1, \dots, F_s$ sont stables par f.

2) $\underset{B}{\text{mat}}(f)$ est de la forme :

[redacted]

3) Endomorphisme induit

Déf

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

Soit F un sev stable par f.

L'endomorphisme induit par f sur F, qu'on note f_F, est défini par :

f_F : [redacted] $\longrightarrow$ [redacted]

$x \longmapsto f_F(x) =$ [redacted]

Prop

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Soit F un sev stable par f.

Soit f_F l'endomorphisme induit par f sur F.

1) $\ker(f_F) =$ [redacted]

2) $\mathrm{Im}(f_F) \subset$ [redacted]

II) Éléments propres d'un endomorphisme (d'une matrice)

1) Éléments propres d'un endomorphisme

E sera un $\mathbb{K}$-esp vect et $f \in \mathcal{L}(E)$.

a) Vecteurs propres - Valeurs propres.

Déf

Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et $x \in E$.

x est dit vecteur propre de f si et ssi :

1) x [redacted]

2) $\exists \lambda \in \mathbb{K}$, [redacted]

Déf

Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

λ est dite valeur propre de f si et ssi :

$\exists x \in E$ [redacted] , [redacted]

Notation et vocabulaire

L'ensemble des valeurs propres de f s'appelle [redacted] de f et se note $S_p(f)$.

$\lambda \in S_p(f) \iff ($ [redacted] , [redacted] $=$ [redacted] $)$

Prop

Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$

$\lambda \in Sp(f) \iff \ker(f-\lambda I_E)$ [redacted] $\iff (f-\lambda I_E)$ [redacted]

Prop

Supposons que E est de dimension finie. On a :

1) Les propositions suivantes sont équivalentes :

a) $\lambda \in Sp(f)$

b) $(f-\lambda I_E)$ [redacted]

c) $\det(f-\lambda I_E)$ [redacted]

2) f inversible $\iff$ ([redacted] n'est pas une valeur propre de f)

Prop

Toute famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes deux à deux est [redacted]

b) Sous-espaces propres

Déf

Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in Sp(f)$.

Le sous-espace propre associé à la valeur propre λ est :

$E_\lambda(f) =$ [redacted]

Prop

Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in Sp(f)$.

1) $x \in E_\lambda(f) \iff f(x) =$ [redacted]
2) $E_\lambda(f)$ est stable par [redacted]
3) Si $fg = gf$, alors $E_\lambda(f)$ est stable par [redacted]

Prop

Des sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes deux à deux sont [redacted]

Prop

1) $f(x) = \lambda x \implies (\forall k \in \mathbb{N},\ f^k(x) =$ [redacted] $)$
2) Si E est de dimension finie, on a :

$\lambda \in S_p(f) \iff \dim(E_\lambda(f))$ [redacted] $1 \iff rg(f - \lambda I_E)$ [redacted] $n-1$

Prop

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, où E $\mathbb{K}$-esp vect de dimension finie $n \geq 1$.
f possède au plus [redacted] valeurs propres distinctes deux à deux.

2) Éléments propres d'une matrice carrée

A sera une matrice carrée de $M_n(\mathbb{K})$ $(n \geq 1)$

Déf

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$.
λ est dite une valeur propre de A si et ss'il existe $X \in$ [redacted]
tel que

[redacted] $X =$ [redacted]

Déf

Soit $X \in M_{n1}(\mathbb{K})$.

X est dit vecteur propre de A si et ssi :

1) X [redacted] 0
2) [redacted] $\lambda \in \mathbb{K}$, [redacted] $= \lambda . X$

Vocabulaire :

1) L'ensemble des valeurs propres de A s'appelle le [redacted] de A, et se note [redacted]
2) Soient $X \in M_{n1}(\mathbb{K}) \setminus \{0\}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

Si $AX = \lambda . X$, on dit que :

[redacted]
i) X est [redacted] de A associé à [redacted]
ii) λ est [redacted] de A associée au [redacted]

Prop

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$.

Les assertions suivantes sont équivalentes :

1) $\lambda \in Sp(A)$ [redacted]
2) $\ker(A-\lambda I_n)$ [redacted] $\{0\}$
3) $(A-\lambda I_n)$ [redacted]
4) $\det($[redacted]$)$ [redacted] 0

Corollaire

A inversible $\Leftrightarrow$ [redacted] $\notin Sp(A)$

Déf

Soit $\lambda \in Sp(A)$.

Le sous-espace propre de A associé à la valeur propre λ est :

$E_\lambda(A) =$ [redacted]

Prop

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$.

Les propositions suivantes sont équivalentes :

1) $\lambda \in Sp(A)$ [redacted]
2) $\dim(E_\lambda(A))$ [redacted] 1
3) $rg(A-\lambda I_n)$ [redacted] $n-1$

Prop

1) Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et B une base de E.

[redacted] et $\underset{B}{mat}(f)$ ont les mêmes valeurs propres.

2) Une matrice carrée et son endomorphisme canoniquement associé ont les mêmes valeurs propres.

III) Polynôme Caractéristique

1) Polynôme Caractéristique d'une matrice carrée

Déf

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ (où $n \geq 1$).

Le polynôme caractéristique de A est noté χ_A et défini par :

$$\boxed{\chi_A(\lambda) = \text{[redacted]}}$$

Prop

Les valeurs propres d'une matrice sont exactement [redacted] son polynôme caractéristique.

Autrement dit

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On a :

$$\lambda \in S_p(A) \iff \chi_A \text{[redacted]}$$

Prop

Si A est une matrice diagonale (resp. triangulaire supérieure) (resp. triangulaire inférieure) alors ses valeurs propres sont exactement [redacted]

Précisément, on a $\chi_A(X) =$ [redacted]

dans chacun des cas suivants :

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \text{ ou } A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \text{ ou } A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Prop

Une matrice et sa transposée ont le même poly[redacted] Ca[redacted] et les mêmes val[redacted]

Prop

Deux matrices semblables ont le même po[redacted] Ca[redacted] et les mêmes val[redacted]

Corollaire

Soient B et B' deux bases d'un esp vect de dimension finie E.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

mat[redacted](f) et mat[redacted](f) ont le même polynôme caractéristique.

Prop

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1) $\chi_A(X)$ est unitaire de degré [redacted]

2) $\chi_A(X) = X^n$ [redacted] $X^{n-1} + \dots +$ [redacted]

Prop (Multiplicité d'une valeur propre)

La multiplicité d'une valeur propre λ de A est sa multiplicité en tant que racine d[redacted]

On la note $m_\lambda(A)$.

Prop

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$.

Supp que $\chi_A(X)$ est scindé dans $\mathbb{K}$. On a :

1) $tr(A)$ est la [redacted] des valeurs propres de A comptées avec [redacted]

2) $\det(A)$ est le [redacted] des valeurs propres de A comptées avec [redacted]

Autrement dit :

Supposons $\chi_A(X) = \prod_{i=1}^{s} (X-\lambda_i)^{m_i}$, où les λ_i sont distincts deux à deux.

On a :

1) $tr(A) = \sum_{i=1}^{s}$ [redacted]

2) $\det(A) = \prod_{i=1}^{s}$ [redacted]

2) Polynôme caractéristique d'un endomorphisme

E sera ici un $\mathbb{K}$-esp vect de dimension finie $n \geq 1$.

Déf

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

Le polynôme caractéristique de f, qu'on note χ_f, est celui de sa matrice dans [redacted]

Autrement dit :

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Soit B une base de E. Notons $A = mat($[redacted]$)$

$$\boxed{\chi_f = \chi_A}$$

NB

Le polynôme caractéristique d'un endomorphisme possède les mêmes propriétés que celui d'une matrice.

Par exemple :

1) Les valeurs propres de f sont les racines de χ_f.
2) χ_f est unitaire de degré n (où $n = \dim E$).
3) $\chi_f(X) = X^n$ [redacted] $X^{n-1} + \cdots +$ [redacted]

Prop Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

Soient F un sev de E stable par f et f_F son endomorphisme induit. On a :

$$\chi_{f_F}(X) \text{ [redacted] } \chi_f(X)$$

Prop Soit $\lambda \in Sp(f)$. On a :

$$1 \text{ [redacted] } \dim(E_\lambda(f)) \text{ [redacted] } m_\lambda(f)$$

Corollaire

Les sous-espaces propres associés aux valeurs propres simples sont de dimension [redacted]

IV) Endomorphismes et matrices diagonalisables

1) Endomorphismes diagonalisables

Déf

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, où E est de dimension finie.
f est diagonalisable si et ss'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est [redacted]

Prop

f est diagonalisable si et ss'il existe une base de E formée de [redacted]

Prop (Condition [redacted] de diagonalisabilité)

$\dim(E) = n \geq 1$ et $f \in \mathcal{L}(E)$.
Si f possède n valeurs propres distinctes deux à deux alors f est [redacted]

Prop

$\dim(E) = n \geq 1$ et $f \in \mathcal{L}(E)$.
Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ les valeurs propres de f, distinctes deux à deux.
Les assertions suivantes sont équivalentes :

1) f est diagonalisable
2) [redacted] $= E_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_s}$
3) [redacted] $= \dim(E_{\lambda_1}) + \dots + \dim(E_{\lambda_s})$

Prop

$\dim(E) = n \geq 1$ et $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$.
Les assertions suivantes sont équivalentes :

1) f est diagonalisable dans $\mathbb{K}$.

2) $\begin{cases} \chi_f(x) \text{ est } [redacted] \text{ dans } \mathbb{K} \\ \forall \lambda \in Sp(f),\ \dim(E_\lambda(f)) = [redacted] \end{cases}$

Résumé

$\dim(E) = n \geq 1$ et $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$.

Les assertions suivantes sont équivalentes :

1) f est diagonalisable dans $\mathbb{K}$.

2) Il existe une base B de E dans laquelle la matrice de f [redacted]

3) Il existe une base B de E formée de [redacted]

4) $E = \bigoplus_{\lambda \in Sp(f)} [redacted]$

5) $\dim(E) = \sum_{\lambda \in Sp(f)} [redacted]$

6) $\begin{cases} \chi_f(x) \text{ est } [redacted] \text{ dans } \mathbb{K} \\ \forall \lambda \in Sp(f),\ \dim(E_\lambda(f)) = [redacted] \end{cases}$

---

2) Matrices diagonalisables

Déf

Une matrice carrée est dite diagonalisable si et ssi elle est [redacted] diagonale.

Prop

A est diagonalisable si et ss'il existe une matrice inversible P telle que PAP^{-1} soit [redacted].

Prop

Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et B une base de E.

f est diagonalisable $\Longleftrightarrow$ mat [redacted] (f) est [redacted]

Corollaire

Une matrice est diagonalisable si et ssi son end[redacted] associé est diagonalisable.

Corollaire (Condition [redacted] de diagonalisabilité d'une matrice)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Si A possède [redacted] valeurs propres distinctes deux à deux, alors A est diagonlisable.

Corollaire

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Les assertions suivantes sont équivalentes :

1) A est diagonalisable dans $\mathbb{K}$.

2) $n = \sum_{\lambda \in Sp(A)} \dim($[redacted]$)$

3) $M_n(\mathbb{K}) = \bigoplus_{\lambda \in Sp(A)}$ [redacted]

4) $\begin{cases} \chi_A(x) \text{ est } \text{[redacted]} \text{ dans } \mathbb{K} \\ \forall \lambda \in Sp(A),\ \dim(E_\lambda(A)) = \text{[redacted]} \end{cases}$

V) Endomorphismes et matrices trigonalisables

1) Trigonalisabilité

E sera un $\mathbb{K}$-esp vect de dim finie $n \geq 1$

Déf

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

f est dit trigonalisable si et ss'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est une matrice [redacted]

Prop

Soit $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$. Soit B une base de E.

Les propositions suivantes sont équivalentes :

1) f est trigonalisable

2) mat(f) est semblable à une matrice [redacted]

Déf

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$.

A est dite trigonalisable si et ssi elle est [redacted] une matrice triangulaire supérieure.

Corollaire

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Soit B une base de E.

[redacted] est trigonalisable $\Longleftrightarrow$ mat[redacted](f) est trigonalisable

Prop

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$.

Les propositions suivantes sont équivalentes :

1) A est dit trigonalisable
2) Il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que PAP^{-1} soit [redacted]

Prop

Un endomorphisme (resp. matrice) est trigonalisable dans $\mathbb{K}$ si et seulement si son polynôme caractéristique est [redacted]

Corollaire

Dans [redacted], tout endomorphisme (resp. matrice) est trigonalisable.

2) Endomorphismes et matrices nilpotents

Vocabulaire

Matrice triangulaire supérieure stricte : C'est toute matrice de la forme :

$$\begin{pmatrix} & * \\ 0 & \end{pmatrix}$$

[redacted]

Lemme

Si $A \in M_n(\mathbb{K})$ est triangulaire supérieure stricte alors $A^n =$ [redacted]

NB

1) f nilpotent $\iff$ mat([redacted] l'une [redacted]

2) A nilpotente $\iff$ (son endom [redacted] l'une)

Prop

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. On a :

1) f nilpotent $\iff$
   - 1) f [redacted]gonalisable
   - 2) $Sp(f) =$ [redacted]

2) A nilpotent $\iff$
   - 1) A [redacted]gonalisable
   - 2) $Sp(A) =$ [redacted]

Prop

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, où $\dim(E) = n \geqslant 1$.

$$\boxed{f \text{ nilpotent} \iff \chi_f(x) = \text{[redacted]}}$$

Prop

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. On a :

$$\boxed{A \text{ nilpotente} \iff \chi_A(x) = \text{[redacted]}}$$

NB

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, où $\dim(E) = n \geqslant 1$.

$$\boxed{f \text{ nilpotent} \iff f^{\text{[redacted]}} = 0}$$

Prop

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, où $\dim(E) = n \geq 1$.

Supp que f est nilpotent d'indice de nilpotence d.

On a : d [redacted] n

Caractérisations d'une matrice nilpotente

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ où $n \geq 1$.

Les propositions suivantes sont équivalentes :

1) A nilpotente [redacted]

2)
   1) A [redacted]gonalisable
   2) $Sp(A)$ [redacted]

3) $\chi_A(x) =$ [redacted]

4) $A^n =$ [redacted]

VI) Polynômes d'endomorphismes et de matrices carrées

Cas général

Soit $P(X) = \sum_{k=0}^{s} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$.

1) $P(f) = \sum_{k=0}^{s}$ [redacted] ; où $f^0 =$ [redacted]

2) $P(A) = \sum_{k=0}^{s}$ [redacted] ; où $A^0 =$ [redacted]

Prop

Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et $A \in M_n(\mathbb{K})$.
Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. On a :

1) i) $(\alpha P + \beta Q)(f) =$ [redacted]

ii) $(\alpha P + \beta Q)(A) =$ [redacted]

2) i) $(PQ)(f) =$ [redacted]

ii) $(PQ)(A) =$ [redacted]

Coroll

Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et $A \in M_n(\mathbb{K})$.
Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$. On a :

1) $P(f)$ et $Q(f)$ [redacted]

2) $P(A)$ et $Q(A)$ [redacted]

3) $\ker(P(f))$ est stable par [redacted]

4) $\ker(P(A))$ est stable par [redacted]

Coroll

Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et $A \in M_n(\mathbb{K})$.

1) L'application $P \mapsto P(f)$ est un morphisme de l'algèbre ([redacted]) vers l'algèbre ([redacted]).

2) L'application $P \mapsto P(A)$ est un morphisme de l'algèbre ([redacted]) vers l'algèbre ([redacted]).

NB 1 :

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.
Notons $\phi : \mathbb{K}[X] \to \mathcal{L}(E)$; $P \mapsto P(f)$ le morph d'algèbres ci-dessus.

1) $\mathrm{Im}(\phi) = \{P(f) / P \in \mathbb{K}[X]\}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$.

Elle se note $\mathbb{K}$ [redacted]

2) $\ker(\phi) = \{P \in \mathbb{K}[X] / P(f) = 0\}$ est un [redacted] de $\mathbb{K}[X]$.

Il s'appelle [redacted] de f.

3) On parle de même de $\mathbb{K}$[redacted], où $A \in M_n(\mathbb{K})$, ainsi que de l'[redacted] an[redacted] de A.

Prop

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Supp que $f(x) = \lambda . x$. On a :

1) $\forall k \in \mathbb{N}$, $f^k(x) =$ [redacted]

2) $\forall P \in \mathbb{K}[X]$, $(P(f))(x) =$ [redacted]

Corollaire

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Soit P un polynôme annulateur de f.

Si $\lambda \in Sp(f)$ alors λ est [redacted] de P.

---

2) Polynômes annulateurs en dimension finie

a) Polynôme minimal

Dans ce paragraphe, E est de dim finie $n \geq 1$

Prop

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

1) Il existe un polynôme non nul annulant f.

2) L'idéal des polynômes annulateurs de f est différent de $\{0\}$.

NB

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a de même :

1) Il existe un polynôme non nul annulant A.
2) L'idéal des polynômes annulateurs de A est différent de $\{0\}$.

Corollaire de définition

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

1) Il existe un unique polynôme unitaire [redacted], vérifiant :

$$\{P \in \mathbb{K}[X] \,/\, P(f) = 0\} = \text{[redacted]} \cdot \mathbb{K}[X]$$

2) [redacted] s'appelle le polynôme [redacted] de f.

NB :

On a de même pour une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

1) Il existe un unique polynôme unitaire [redacted], vérifiant :

$$\{P \in \mathbb{K}[X] \,/\, P(A) = 0\} = \text{[redacted]} \cdot \mathbb{K}[X]$$

2) [redacted] s'appelle le polynôme [redacted] de A.

À retenir ⚠

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. On a :

1) $\pi_f(X)$ est unitaire.
2) $\pi_f(f)$ [redacted]
3) $P(f) = 0 \Leftrightarrow \pi_f$ [redacted] P

4) Si $\begin{pmatrix} P(f)=0 \\ P\neq 0 \end{pmatrix}$ alors $\deg(\pi_f)$ [redacted] $d^\circ(P)$

⚠ 5) Si $\begin{pmatrix} P(f)=0 \\ \deg(P)<\deg(\pi_f) \end{pmatrix}$ alors P [redacted]

NB :

Mêmes résultats pour une matrice $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

1) $\pi_A(X)$ est unitaire.

2) $\pi_A(A)$ [redacted]

3) $P(A)=0 \Leftrightarrow \pi_A$ [redacted] P

4) Si $\begin{pmatrix} P(A)=0 \\ P\neq 0 \end{pmatrix}$ alors $\deg(\pi_A)$ [redacted] $d^\circ(P)$

5) Si $\begin{pmatrix} P(A)=0 \\ \deg(P)<\deg(\pi_A) \end{pmatrix}$ alors P [redacted]

Prop

Soit $f\in\mathcal{L}(E)$. Notons $d=\deg(\pi_f)$.

Rappelons que $\mathbb{K}[f]=\{P(f)\ /\ P\in\mathbb{K}[X]\}$. On a :

1) $(I_E, f, \dots, f$ [redacted] $)$ est une base de $\mathbb{K}[f]$.

2) $\dim(\mathbb{K}[f])=$ [redacted]

---

b) Théorème de Cayley-Hamilton

Prop (Théorème de Cayley-Hamilton)

1) Soit $f\in\mathcal{L}(E)$. On a :

[redacted] $=0$

2) Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. On a : [redacted] $= 0$

Autrement dit

Le polynôme caractéristique d'un endomorphisme (resp. une matrice) en est un polynôme [redacted]

Corollaire

1) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On a

$\Pi_f(X)$ [redacted] $\chi_f(X)$

2) Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. On a

$\Pi_A(X)$ [redacted] $\chi_A(X)$

Corollaire

Les valeurs propres d'un endomorphisme (resp. une matrice) sont exactement [redacted] son polynôme minimal.

c) Théorème de décomposition des noyaux

Prop (Théorème de décomposition des noyaux)

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.
Soient P et $Q \in \mathbb{K}[X]$ [redacted]. On a :

$\ker\big(P(f) \circ Q(f)\big) =$ [redacted] $\oplus$ [redacted]

Corollaire

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Soit $s \geq 2$.

Soient $P_1, \dots, P_s \in \mathbb{K}[X]$ [redacted]

On a :

$$\ker(P_1(f) \circ \cdots \circ P_s(f)) = \text{[redacted]} \oplus \cdots \oplus \text{[redacted]}$$

Clés pratiques à retenir

1) $\forall a$ [redacted] b, $(X-a) \wedge (X-b) = 1$

2) Si $a_1, \dots, a_s \in \mathbb{K}$ distincts deux à deux, alors les polynômes $(X-a_1), \dots, (X-a_s)$ sont [redacted]

3) Si $a_1, \dots, a_s \in \mathbb{K}$ distincts deux à deux, alors les polynômes $(X-a_1)^{m_1}, \dots, (X-a_s)^{m_s}$ sont [redacted]

De ces clés, on a les réflexes pratiques suivants :

Réflexes pratiques à retenir

1) Réflexe 1 : (à savoir montrer – voir cours complet)

Si $(f - aI_E)(f - bI_E) = 0$, où a [redacted] b, On a :

$$E = \text{[redacted]} \oplus \text{[redacted]}$$

2) Réflexe 2 (à savoir montrer – voir cours complet)

Si $(f-a_1 I_E)\circ\cdots\circ(f-a_s I_E)=0$, où les a_i sont [redacted]

Alors:

$$E=\bigoplus_{i=1}^{s}$$ [redacted]

3) Réflexe 3 (à savoir montrer – voir cours complet)

Si $(f-a_1 I_E)^{m_1}\circ\cdots\circ(f-a_s I_E)^{m_s}=0$, où les a_i sont [redacted]

Alors:

$$E=\bigoplus_{i=1}^{s}$$ [redacted]

Autres Réflexes pratiques à retenir

1) Réflexe 1 :

Si $\chi_f(X)=(X-a)(X-b)$, où a [redacted] b, On a :

[redacted] $=\ker(f-aI_E)\oplus\ker(f-bI_E)$

2) Réflexe 2 (à savoir montrer – voir cours complet)

Si $\chi_f(X)=(X-a_1)\cdots\cdots(X-a_s)$, où les a_i sont [redacted]

Alors:

[redacted] $=\bigoplus_{i=1}^{s}\ker(f-a_iI_E)$

3) Réflexe 3 (à savoir montrer _ voir cours complet)

Si $\chi_f(X) = \prod_{i=1}^{s} (X-a_i)^{m_i}$, où les a_i sont [redacted]

Alors:

$$E = \bigoplus_{i=1}^{s} \text{[redacted]}$$

NB 2

Tous ces réflexes sont valables pour les matrices.

3) Application des polynômes d'endomorphismes à la réduction

Supp que:

$$E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_s$$

Notation

Notons pour chaque $1 \leq i \leq s$, p_i le projecteur sur F_i parallèlement à $\bigoplus_{j=1}^{s} F_j$ [redacted].

Vocabulaire

$p_1, \dots, p_s$ s'appellent les projecteurs adaptés à la décomposition

$$E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_s$$

Prop

Gardons les mêmes notations que ci-dessus, on a:

1) $\forall i \neq j$, $p_i \circ p_j =$ [redacted]

2) $\sum_{i=1}^{s} p_i =$ [redacted]

Prop

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.
Supp que f est diagonalisable, de valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ distinctes deux à deux.
Notons $P_1, \dots, P_s$ les projecteurs adaptés à la décomposition

$$E = E_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_s}$$

On a :

1) $f = \sum_{i=1}^{s}$ [redacted] P_i

2) $\forall Q \in \mathbb{K}[X],\ Q(f) = \sum_{i=1}^{s}$ [redacted] P_i

Prop

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.
Les propositions suivantes sont équivalentes :

1) f est diagonalisable dans $\mathbb{K}$.

2) ⚠ Il existe un polynôme [redacted] de f, [redacted] dans $\mathbb{K}$ et à racines [redacted]

3) $\Pi_f(X)$ est [redacted] à ra[redacted].

NB :

On a de même pour les matrices :

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$.
Les propositions suivantes sont équivalentes :

1) A est diagonalisable dans $\mathbb{K}$.

2) Il existe un polynôme [redacted] de A, [redacted] dans $\mathbb{K}$ et à ra[redacted]

3) $\Pi_A(X)$ est [redacted] dans $\mathbb{K}$ à ra[redacted].

4) Polynôme minimal d'un endomorphisme induit

IG :
- $f \in \mathcal{L}(E)$
- F sev stable par f
- f_F l'endomorphisme induit par f sur F

Prop

1) $\Pi_{f_F}(X)$ [redacted] $\Pi_f(X)$

2) Si f est diagonalisable dans $\mathbb{K}$, alors f_F [redacted]

Fin