Solution : Série 1

Exercice 1 :

$E = \mathbb{R}_2[X]$ et $f : P \mapsto P(\frac{X}{2}) - 2P(X+1)$

1) Montrer que f est un endomorphisme de E.
2) Détérminer la matrice de f dans la base canonique de E.
3) Détérminer det(f) et trace de f.
   f est-il un automorphisme de E ? justifier votre réponse.

Sol :

$P \in \mathbb{R}_2[X] \Leftrightarrow d^\circ(P) \leq 2$

1) Mq que $f \in \mathcal{L}(E)$.

(i) f est une application de E vers E

si $d^\circ(P) \leq 2$ alors $f(P) = P(\frac{X}{2}) - 2P(X+1)$ est aussi de degré ≤ 2.

(ii) f est une application linéaire

$f(x+y) = f(x) + f(y)$

$f(\lambda x) = \lambda f(x)$

ou bien

$f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y)$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Soient $P, Q \in E$.

Mq que $f(\lambda P + Q) = \lambda f(P) + f(Q)$.

$f(P) = P(\frac{X}{2}) - 2P(X+1)$

On a :

$$\boxed{f(\lambda P + Q)} = (\lambda P + Q)(\tfrac{X}{2}) - 2(\lambda P + Q)(X+1)$$
$$= \lambda P(\tfrac{X}{2}) + Q(\tfrac{X}{2}) - 2\lambda P(X+1) - 2Q(X+1)$$
$$= \lambda \underbrace{\left(P(\tfrac{X}{2}) - 2P(X+1)\right)}_{= f(P)} + \underbrace{\left(Q(\tfrac{X}{2}) - 2Q(X+1)\right)}_{= f(Q)}$$
$$= \boxed{\lambda f(P) + f(Q)}$$

2) $\underset{B}{\mathrm{mat}}(f) = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccc} f(1) & f(x) & f(x^2) \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ x \\ x^2 \end{array} & \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \end{array}$; où $B = (1, x, x^2)$

$$\boxed{f(P) = P\left(\frac{x}{2}\right) - 2P(x+1)}$$

$$\left(P(x) \overset{\text{ici}}{=\!=} 1\right)$$

$$f(1) = 1 - 2 \cdot 1 = -1$$

$$f(x) = \frac{x}{2} - 2(x+1) = -\frac{3}{2}x - 2 \qquad \left(P(x) \overset{\text{ici}}{=\!=} x\right)$$

$$f(x^2) = \left(\frac{x}{2}\right)^2 - 2(x+1)^2 = -\frac{7}{4}x^2 - 4x - 2$$

$$\underset{B}{\mathrm{mat}}(f) = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccc} f(1) & f(x) & f(x^2) \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ x \\ x^2 \end{array} & \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 0 & -\frac{3}{2} & -4 \\ 0 & 0 & -\frac{7}{4} \end{pmatrix} \end{array}$$

RIR ; C'est une matrice triangulaire supérieure

3) Détérminer det(f) et trace de f.
f est-il un automorphisme de E ? justifier votre réponse.

Sol :

$$\operatorname{mat}_B(f) = \begin{array}{c|ccc} & f(1) & f(x) & f(x^2) \\ \hline 1 & -1 & -2 & -2 \\ x & 0 & -\frac{3}{2} & -4 \\ x^2 & 0 & 0 & -\frac{7}{4} \end{array}$$

Rappel : $f \in \mathcal{L}(E)$.
$\det(f) \overset{\text{déf}}{=} \det(\operatorname{mat}_S(f))$
$\operatorname{tr}(f) \overset{\text{déf}}{=} \operatorname{tr}(\operatorname{mat}_S(f))$
où S une base qque de E

$\rightarrow \det(f) = (-1) \times \left(-\frac{3}{2}\right) \times \left(-\frac{7}{4}\right) = -\frac{21}{8}$

$\rightarrow \operatorname{tr}(f) = (-1) + \left(-\frac{3}{2}\right) + \left(-\frac{7}{4}\right) = \frac{-17}{4}$

$\rightarrow f \in GL(E)$ car $\det(f) \neq 0$.

Rappel : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, où E de dimension finie

f automorphisme $\Longleftrightarrow$ f bijectif $\Longleftrightarrow$ f inversible $\Longleftrightarrow$ $\det(f) \neq 0$

Rappel :

$GL(E)$: Le groupe linéaire de E.
C'est l'ensemble des automorphismes de E.

Fin Ex 1

Exercice 2 :

E est un $\mathbb{R}$-esp vect de dimension 3, et $B = (e_1, e_2, e_3)$ en est une base.
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que

$$A = mat_B(f) = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

1) Détérminer trois vecteurs non nuls $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ tels que :

$$\begin{cases} f(\varepsilon_1) &= 0 \\ f(\varepsilon_2) &= \varepsilon_2 \\ f(\varepsilon_3) &= 2\varepsilon_3 \end{cases}$$

2) Justifier que la famille $S = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une base de E, puis donner la matrice de f dans cette base.(notons-la D)

3) Détérminer une matrice inversible P telle que

$$A = PDP^{-1}$$

4) i) Calculer P^{-1}

ii) Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$

iii) Considérons les suites $(x_n)_n$, $(y_n)_n$ *et* $(z_n)_n$ définies par :

$$\begin{cases} x_0 &= 1 \\ y_0 &= -1 \\ z_0 &= 0 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} x_{n+1} &= 4x_n - 2y_n - 2z_n \\ y_{n+1} &= x_n - z_n \\ z_{n+1} &= 3x_n - 2y_n - z_n \end{cases}$$

Détérminer le terme général de chacune des suites $(x_n)_n$, $(y_n)_n$ *et* $(z_n)_n$.

Solution

1) i) Déterminons $\varepsilon_1 \neq 0$ tel que $f(\varepsilon_1) = 0$!

$$\begin{array}{c|ccc} & f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \\ \hline e_1 & 4 & -2 & -2 \\ e_2 & 1 & 0 & -1 \\ e_3 & 3 & -2 & -1 \end{array} = mat_B(f)$$

Posons $\varepsilon_1 = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3$. On a :

$\boxed{f(\varepsilon_1) = 0} \Leftrightarrow \alpha f(e_1) + \beta f(e_2) + \gamma f(e_3) = 0$

$\Leftrightarrow \alpha(4e_1 + e_2 + 3e_3) + \beta(-2e_1 - 2e_3) + \gamma(-2e_1 - e_2 - e_3) = 0$

$\Leftrightarrow (4\alpha - 2\beta - 2\gamma)e_1 + (\alpha - \gamma)e_2 + (3\alpha - 2\beta - \gamma)e_3 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4\alpha - 2\beta - 2\gamma = 0 \\ \alpha - \gamma = 0 \\ 3\alpha - 2\beta - \gamma = 0 \end{cases}$$

(e_1, e_2, e_3) est libre

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha - 2\beta = 0 \\ \alpha = \gamma \\ 2\alpha - 2\beta = 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma$

$\varepsilon_1 = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3$

$\Leftrightarrow \varepsilon_1 = \alpha(e_1 + e_2 + e_3)$

$\Leftrightarrow \boxed{\varepsilon_1 \in Vect(e_1 + e_2 + e_3)}$

$Vect(u) = \{\lambda u / \lambda \in \mathbb{K}\}$

$\not\Leftarrow$!

Ainsi : $f(\varepsilon_1) = 0 \Leftrightarrow \varepsilon_1 \in \mathrm{Vect}(e_1+e_2+e_3)$

$\varepsilon_1 = e_1+e_2+e_3$ Convient.

Il y a une infinité de ε_1 convenables.

Remarque : $\ker(f) = \mathrm{Vect}(e_1+e_2+e_3)$

2ème manière de faire : Matriciellement

Posons $\varepsilon_1 = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3$. On a :

$$\boxed{f(\varepsilon_1)=0} \Leftrightarrow \underset{B}{\mathrm{mat}}(f(\varepsilon_1)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$mat_B(f) = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \underset{B}{\mathrm{mat}}(f) \cdot \underset{B}{\mathrm{mat}}(\varepsilon_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4\alpha - 2\beta - 2\gamma = 0 \\ \alpha - \gamma = 0 \\ 3\alpha - 2\beta - \gamma = 0 \end{cases}$$

C'est le syst lin ci-dessus

etc.

ii) Déterminons $\varepsilon_2 \neq 0$ tel que $f(\varepsilon_2) = \varepsilon_2$

$$\begin{array}{cccc} & f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \\ e_1 & & & \\ e_2 & & & \\ e_3 & & & \end{array} \quad mat_B(f) = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Posons $\varepsilon_2 = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3$. On a :

$\boxed{f(\varepsilon_2) = \varepsilon_2} \Leftrightarrow \alpha f(e_1) + \beta f(e_2) + \gamma f(e_3) = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3$

$\Leftrightarrow \alpha(4e_1 + e_2 + 3e_3) + \beta(-2e_1 - 2e_3) + \gamma(-2e_1 - e_2 - e_3) = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3$

$\Leftrightarrow (4\alpha - 2\beta - 2\gamma)e_1 + (\alpha - \gamma)e_2 + (3\alpha - 2\beta - \gamma)e_3 = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 4\alpha - 2\beta - 2\gamma = \alpha \\ \alpha - \gamma = \beta \\ 3\alpha - 2\beta - \gamma = \gamma \end{cases}$ || (e_1, e_2, e_3) est libre

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3\alpha - 2\beta - 2\gamma = 0 \\ \alpha - \beta - \gamma = 0 \\ 3\alpha - 2\beta - 2\gamma = 0 \end{cases}$ (système linéaire à résoudre)

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3\alpha - 2\beta - 2\gamma = 0 \\ \alpha - \beta - \gamma = 0 \end{cases}$ $\times(2)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \alpha - \beta - \gamma = 0 \end{cases}$ $L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = -\gamma \end{cases}$

$\Leftrightarrow \varepsilon_2 = \beta(e_2 - e_3)$

$\Leftrightarrow \varepsilon_2 \in \mathrm{Vect}(e_2 - e_3)$

$\varepsilon_2 = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3$

$\boxed{\varepsilon_2 = e_2 - e_3 \quad \text{Convient}}$

N.B

$f(\varepsilon_2) = \varepsilon_2 \Leftrightarrow \varepsilon_2 \in Vect(e_2 - e_3)$ veut dire que :

$$Vect(e_2 - e_3) = \ker(f - id_E)$$

iii) $\varepsilon_3 = e_1 + e_3$ vérifie $f(\varepsilon_3) = 2\varepsilon_3$.

(On raisonne comme ci-dessus)

2) Justifier que la famille $S = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une base de E, puis donner la matrice de f dans cette base.(notons-la D)

i) Mq S est une base de E.

Rappel :

$$\boxed{S \text{ base de } E \Leftrightarrow \det_B(S) \neq 0}$$

$$\det_B(S) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = e_1 + e_2 + e_3 \\ \boxed{\varepsilon_2 = e_2 - e_3} \\ \varepsilon_3 = e_1 + e_3 \end{cases} ; S = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$$

$$\det_B(S) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

on développe suivant la 1ère ligne.

$$= 1 \cdot \overbrace{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}}^{=1} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \overbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}^{=-2}$$

$$\det_B(S) = -1 \neq 0 \Longrightarrow \boxed{S \text{ est une base de } E}$$

ii) $\operatorname{mat}_S(f) = \begin{array}{c|ccc} & f(\varepsilon_1) & f(\varepsilon_2) & f(\varepsilon_3) \\ \varepsilon_1 & & & \\ \varepsilon_2 & & & \\ \varepsilon_3 & & & \end{array}$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = D$

Car $\begin{cases} f(\varepsilon_1) = 0 \\ f(\varepsilon_2) = \varepsilon_2 \\ f(\varepsilon_3) = 2\varepsilon_3 \end{cases}$

R/R : D est diagonale

$D = \operatorname{diag}(0, 1, 2)$

3) Détérminer une matrice inversible P telle que

$$A = PDP^{-1}$$

$A = \operatorname{mat}_B(f)$ et $D = \operatorname{mat}_S(f)$

Alors :

$A = PDP^{-1} \iff \operatorname{mat}_B(f) = P \cdot \operatorname{mat}_S(f) \cdot P^{-1}$

$P = P_{B,S}$; la matrice de passage de la base B à la base S.

$P = P_{B,S} = (\; ? \;)$

$B = (e_1, e_2, e_3)$; $S = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$; où $\begin{cases} \boxed{\varepsilon_1 = e_1 + e_2 + e_3} \\ \varepsilon_2 = e_2 - e_3 \\ \varepsilon_3 = e_1 + e_3 \end{cases}$

$P_{B,S} \overset{\text{déf}}{=\!=} \operatorname{mat}_B(S) = \begin{array}{c|ccc} & \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 \\ e_1 & & & \\ e_2 & & & \\ e_3 & & & \end{array}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

P est inversible en tant que matrice de passage.

Rappel : Toute matr de passage est inversible

4) i) Calculer P^{-1}

ii) Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$

iii) Considérons les suites $(x_n)_n$, $(y_n)_n$ *et* $(z_n)_n$ définies par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_0 & = & 1 \\ y_0 & = & -1 \\ z_0 & = & 0 \end{array}\right. \text{ et } \left\{\begin{array}{lcl} x_{n+1} & = & 4x_n - 2y_n - 2z_n \\ y_{n+1} & = & x_n - z_n \\ z_{n+1} & = & 3x_n - 2y_n - z_n \end{array}\right.$$

Détérminer le terme général de chacune des suites $(x_n)_n$, $(y_n)_n$ *et* $(z_n)_n$.

4) i) $P^{-1} = ?$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Méthode du déterminant :

$$P^{-1} = \frac{1}{\det(P)} \, {}^t\mathrm{Com}(P)$$

$\det(P) = -1$.

$$\mathrm{Com}(P) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$${}^t\mathrm{Com}(P) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

D'où $$\boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}}$$

ii) $A = P D P^{-1}$; $D^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$

$A^n = P D^n P^{-1} = \begin{pmatrix} \ast \end{pmatrix}$

sans justification

faites les calculs

iii) Considérons les suites $(x_n)_n$, $(y_n)_n$ *et* $(z_n)_n$ définies par :

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = -1 \\ z_0 = 0 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} x_{n+1} = 4x_n - 2y_n - 2z_n \\ y_{n+1} = x_n - z_n \\ z_{n+1} = 3x_n - 2y_n - z_n \end{cases}$$

Détérminer le terme général de chacune des suites $(x_n)_n$, $(y_n)_n$ *et* $(z_n)_n$.

(Très classique son idée)

Posons $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$.

On a : $\forall n \in \mathbb{N},\ X_{n+1} = A \cdot X_n$

D'où $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ X_n = A^n \cdot X_0}$

ressemble à une suite géométrique de raison A

« ne le demontrez pas »

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} x & x & x \\ x & x & x \\ x & x & x \end{pmatrix}}_{A^n \text{ déjà explicité}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x_n = \ldots \\ y_n = \ldots \\ z_n = \ldots \end{cases}$$

Exercice 3 :

Soit E un $\mathbb{K}$- espace vectoriel de dimension $n \geq 2$. Soit f un endomorphisme de E nilpotent d'indice n. càd $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$.
Soit alors $e \in E$ tel que $f^{n-1}(e) \neq 0$.

1) Montrer que la famille $B = (e, f(e), \ldots, f^{n-1}(e))$ est une base de E.
2) Ecrire la matrice de f dans la base B.

Solution

1) $Card(B) = n = dim(E)$, alors il suffit de m.q. B est libre.

Soient alors $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{K}$ tels que $\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k f^k(e) = 0$.

Mq $(\forall k \in [\![0, n-1]\!], \lambda_k = 0)$

On a : $\left(\lambda_0 e + \lambda_1 f(e) + \cdots + \lambda_{n-1} f^{n-1}(e) = 0\right)$ Ω

$f^n = 0$; $(f^k = 0 \ \forall k \geq n)$

$f^{n-1}(e) \neq 0$

$\lambda_0 = 0$; en effet :

Composons par f^{n-1} dans Ω, on obtient :

$$\lambda_0 f^{n-1}(e) = 0$$

D'où $\boxed{\lambda_0 = 0}$; car $f^{n-1}(e) \neq 0$.

$\lambda_1 = 0$; en effet :

Ω devient : $\left(\lambda_1 f(e) + \cdots + \lambda_{n-1} f^{n-1}(e) = 0\right)$

Composons par f^{n-2}, on obtient :

$$\lambda_1 f^{n-1}(e) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda_1 = 0}$$

De proche en proche on annulera tous les λ_k restants.

2ème manière de faire

Soient alors $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{K}$ tels que $\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k f^k(e) = 0$. (Ω)

Mq $(\forall k \in [\![0, n-1]\!], \lambda_k = 0)$

Raisonnons par l'absurde.

Supposons qu'il existe $k \in [\![0, n-1]\!]$ tel que $\lambda_k \neq 0$.

Posons $\min(\{k \in [\![0, n-1]\!] \,/\, \lambda_k \neq 0\}) = i$

On a : $\begin{cases} \lambda_i \neq 0 \\ \forall k < i, \ \lambda_k = 0 \end{cases}$

(Ω) devient : $\sum_{k=i}^{n-1} \lambda_k f^k(e) = 0$.

Car $\forall k < i, \ \lambda_k = 0$

On a : $\left(\lambda_i f^i(e) + \dots + \lambda_{n-1} f^{n-1}(e) = 0 \right)$

Composons par f^{n-1-i}, on obtient $\lambda_i f^{n-1}(e) = 0$

D'où $\boxed{\lambda_i = 0}$ $\left(\text{car } f^{n-1}(e) \neq 0 \right)$

$\left\| \begin{array}{l} f^n = 0 \ ; \ (f^k = 0 \ \forall k \geq i) \\ f^{n-1}(e) \neq 0 \end{array} \right.$

Ce qui est absurde.

D'où

$(\forall k \in [\![0, n-1]\!], \lambda_k = 0)$

N.B : $\dim(E) = n$ et $f \in \mathcal{L}(E)$.

Si f nilpotent d'indice p, et $e \in E$ tel que $f^{p-1}(e) \neq 0$, alors la famille $(e, f(e), \dots, f^{p-1}(e))$ est **libre**.

Même démo.

(À savoir démontrer)

Exercice 3 :

Soit E un $\mathbb{K}$- espace vectoriel de dimension $n \geq 2$. Soit f un endomorphisme de E nilpotent d'indice n. càd $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$.

Soit alors $e \in E$ tel que $f^{n-1}(e) \neq 0$.

1) Montrer que la famille $B = (e, f(e), \dots, f^{n-1}(e))$ est une base de E.
2) Ecrire la matrice de f dans la base B.

2)

$$\underset{B}{\text{mat}}(f) = \begin{array}{c|cccc} & f(e) & f(f(e)) & \cdots & f(f^{n-1}(e)) \\ \hline e & & & & \\ f(e) & & & & \\ \vdots & & & & \\ f^{n-1}(e) & & & & \end{array} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Fin Ex3

Question : Soit $S = (f^{n-1}(e), \dots, f(e), e)$

Ecrire de même $\underset{S}{\text{mat}}(f)$

Exercice 4 :

Soit $n \geq 2$. Notons $E = \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$. On notera $Tr(A)$ la trace de A.

1) Montrer que Tr est une forme linéaire sur E.

2) Montrer que
$$\forall A, B \in E,\ Tr(AB) = Tr(BA)$$

3) Soit f une forme linéaire sur E vérifiant
$$\forall A, B \in E,\ f(AB) = f(BA)$$

   i) Montrer que
      a) $\forall\, 1 \leq i \neq j \leq n\ ,\ f(E_{ij}) = 0$
      b) $\forall\, 1 \leq i, j \leq n\ ,\ f(E_{ii}) = f(E_{jj})$

   ii) En déduire que f est proportionnelle à Tr.

Sol :

1) Tr linéaire ? (en bref)

Mq que : $Tr(\lambda A + B) \overset{?}{=} \lambda Tr(A) + Tr(B)$

$$Tr(A) \overset{\text{déf}}{=} \sum_{i=1}^{n} A_{ii} \quad !$$

$$Tr(\lambda A + B) = \sum_{i=1}^{n} (\lambda A + B)_{ii} \quad !$$
$$= \sum_i (\lambda A_{ii} + B_{ii})$$
$$= \lambda \sum_i A_{ii} + \sum_i B_{ii}$$
$$= \lambda Tr(A) + Tr(B)$$

2) Mq $Tr(AB) = Tr(BA)$

$$Tr(AB) = \sum_i (AB)_{ii}$$
$$= \sum_i \left(\sum_j A_{ij} B_{ji} \right)$$
$$= \sum_j \left(\sum_i A_{ij} B_{ji} \right)$$

|| $\sum_i$ et $\sum_j$ inversés

$$= \sum_j \left(\sum_i A_{ij} B_{ji} \right)$$

$$= \sum_j \underbrace{\left(\sum_i B_{ji} A_{ij} \right)}_{=(BA)_{jj}}$$

$$= \sum_j (BA)_{jj}$$

$$\overset{\text{déf}}{=} Tr(BA)$$

- 3) Soit f une forme linéaire sur E vérifiant

$$\forall A, B \in E,\ f(AB) = f(BA)$$

i) Montrer que
   a) $\forall\ 1 \leq i \neq j \leq n\ ,\ f(E_{ij}) = 0$
   b) $\forall\ 1 \leq i, j \leq n\ ,\ f(E_{ii}) = f(E_{jj})$
ii) En déduire que f est proportionnelle à Tr.

3) i) a) Supposons $i \neq j$.
M que $f(E_{ij}) = 0$

Rappel :

$$E_{ij} E_{kl} = \delta_{jk} E_{il}$$

$$\delta_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = k \\ 0 & \text{si } j \neq k \end{cases} \text{ ; le symbole de Kronecker}$$

$$f(E_{ij}) = f(E_{ii} E_{ij})$$

$E_{ii} E_{ij} = E_{ij}$ car $\delta_{ii} = 1$

$$= f(E_{ij} E_{ii})$$

$$= f(\delta_{ji} E_{ii}) \text{ ; } \delta_{ji} = 0 \text{ car } i \neq j$$

$$= f(0)$$

$$= 0 \quad (f \text{ linéaire})$$

2) i) b) Montrons que $f(E_{ii}) = f(E_{jj})$

On a :

$$f(E_{ii}) = f(\underbrace{E_{ij}\,E_{ji}}_{=E_{ii}})$$

$$= f(E_{ji}\,E_{ij})$$

$$= f(\delta_{ii}\,E_{jj})$$

$$= f(E_{jj})$$

$$E_{ij}\,E_{kl} = \delta_{jk}\,E_{il}$$

Rappel

3) Soit f une forme linéaire sur E vérifiant

$$\forall A, B \in E,\ f(AB) = f(BA)$$

i) Montrer que

a) $\forall\, 1 \leq i \neq j \leq n\ ,\ f(E_{ij}) = 0$

b) $\forall\, 1 \leq i, j \leq n\ ,\ f(E_{ii}) = f(E_{jj})$

ii) En déduire que f est proportionnelle à Tr.

3) ii) Montrons que f et Tr sont colinéaires.

Càd : $(\exists \lambda \in \mathbb{K},\ f = \lambda\, Tr)$

« C'est qui λ ? »

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. On a $A = \sum_{i,j} A_{ij} E_{ij}$.

On a :

$$\boxed{f(A)} = \sum_{i,j} A_{ij}\, f(E_{ij}) \quad (\text{car } f \text{ linéaire})$$

$$\overset{!}{=} \underbrace{\left(\sum_{i \neq j} A_{ij}\, \underbrace{f(E_{ij})}_{\substack{=0 \\ \text{car } i \neq j}}\right)}_{=0} + \sum_{i=1}^{n} A_{ii}\, \underbrace{f(E_{ii})}_{=f(E_{11})}$$

Constante

$$= \sum_{i=1}^{n} A_{ii}\, f(E_{11})$$

$$= \lambda \cdot \sum_{i=1}^{n} A_{ii} \ ; \text{ où } \lambda = f(E_{11}).$$

$$= \lambda\, Tr(A)$$

Exercice 5 :

Soit $n \geq 2$. Soit $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant

$$\forall i \in [1, n], \ |a_{ii}| \succ \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$$

Notre objectif est de montrer que la matrice A, dite à diagonale strictement dominante, est inversible.

1) Supposons l'existence d'un vecteur $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ non nul de $\mathbb{M}_{n1}(\mathbb{C})$ tel que $AX = 0$.
Soit $k \in [1, n]$ tel que $|x_k| = sup_{1 \leq i \leq n} |x_i|$.
Montrer que $|a_{kk} x_k| \leq \sum_{j \neq k} |a_{kj} x_j|$

$\forall i, \ |x_i| \leq |x_k|$

2) Aboutir à une contradiction.

3) Conclure.

Solution :

1)

$$AX = 0 \Rightarrow (AX)_k = 0$$

$k \rightarrow x_k = 0$

Et

$$(AX)_k = \sum_{j=1}^{n} a_{kj} x_j$$

$k^{\text{ème}}$ lg

A

X

D'où

$$\sum_{j=1}^{n} a_{kj} x_j = 0$$

$$\left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} a_{kj} x_j \right) + a_{kk} x_k = 0$$

$$a_{kk} x_k = - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} a_{kj} x_j$$

$$|a_{kk}x_k| = \left|\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} a_{kj}x_j\right| \leqslant \sum_{j\neq k}|a_{kj}x_j|$$

CQFD

2) On a $|a_{kk}|\cdot|x_k| \leqslant \sum_{j\neq k}|a_{kj}|\overbrace{|x_j|}^{\leqslant |x_k|}$

$$\leqslant \sum_{j\neq k}|a_{kj}|\,|x_k|$$

$$\Rightarrow |x_k|\cdot|a_{kk}| \leqslant |x_k|\cdot\left(\sum_{j\neq k}|a_{kj}|\right)$$

En simplifiant par $|x_k|$, qui > 0, on aura :

$$|a_{kk}| \leqslant \sum_{j\neq k}|a_{kj}|$$

Ce qui est absurde.

3) On conclut que A est <u>inversible</u> ; en effet :

<u>Rappel</u> : $\boxed{A \text{ inversible} \Leftrightarrow (\forall X\in M_{n1}(\mathbb{K}),\ AX=0 \Rightarrow X=0) \Leftrightarrow \ker(A)=\{0\}}$

Soit alors $X\in M_{n1}(\mathbb{C})$. Supp que $A\cdot X=0$

et montrons que $X=0$.

Soit alors $X \in M_{n1}(\mathbb{C})$. Supp que $A \cdot X = 0$

et montrons que $X = 0$.

Raisonne par l'absurde et supp que $X \neq 0$

On a $\begin{cases} AX = 0 \\ \text{et } X \neq 0 \end{cases}$

Ce qui est absurde d'après 2°).

Exercice 5 :

Soit $n \geq 2$. Soit $A = (a_{ij}) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant

$$\forall i \in [1, n],\ |a_{ii}| \succ \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$$

Notre objectif est de montrer que la matrice A, dite à diagonale strictement dominante, est inversible.

1) Supposons l'existence d'un vecteur $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ non nul de $\mathrm{M}_{n1}(\mathbb{C})$ tel que $AX = 0$.
Soit $k \in [1, n]$ tel que $|x_k| = sup_{1 \leq i \leq n} |x_i|$.
Montrer que $|a_{kk} x_k| \leq \sum_{j \neq k} |a_{kj} x_j|$

2) Aboutir à une contradiction.

3) Conclure.

Fin EX5

Rappels :

$A \in M_n(\mathbb{K})$.

1) $\ker(A) = \{ X \in M_{n1}(\mathbb{K}) \,/\, \overbrace{AX}^{\text{produit}} = 0 \}$

$\underbrace{AX}$ ↳ non pas $A(X)$

2) $X \in \ker(A) \Longleftrightarrow AX = 0$

3) $\ker(A)$ sev de $M_{n1}(\mathbb{K})$ (ça contient donc 0)

4) $\ker(A) = \{0\} \Longleftrightarrow \ker(A) \subset \{0\}$

$\Longleftrightarrow (\forall X \in M_{n1}(\mathbb{K}),\ X \in \ker(A) \Rightarrow X \in \{0\})$

$\ker(A) = \{0\} \Longleftrightarrow (\forall X \in M_{n1}(\mathbb{K}),\ AX = 0 \Rightarrow X = 0)$

5) Pareil si $f \in \mathcal{L}(E,F)$. On a :

$\ker(f) = \{0\} \Longleftrightarrow (\forall x \in E,\ f(x) = 0 \Longrightarrow x = 0)$

$\Updownarrow$

f injective

En pratique (sur votre copie)

1) Pour mq f injective, on rédige comme suit :

« Soit $x \in E$.

Supp que $f(x) = 0$, et mq que $x = 0$

2) Pareil pour une matrice A.

Exercice 6 (CCP 2020 : Extrait et adapté)

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $mat_B(f) = A$; où $B = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Notons $\chi_A(X) = det(XI_3 - A)$.

1) Montrer que $\chi_A(X) = (X-1)^2(X-4)$.
   Notons $E_1(f) = ker(f - id_{\mathbb{R}^3})$ et $E_4(f) = ker(f - 4id_{\mathbb{R}^3})$.

2) Déterminer une base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ de $E_1(f)$ et une base (ε_3) de $E_4(f)$.
   Notons maintenant $B_p = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$.

3) Vérifier que B_p est une base de $\mathbb{R}^3$ et écrire D, la matrice de f dans cette base.

4) Déterminer une matrice inversible P telle que $A = PDP^{-1}$.

5) Déterminer pour tout entier naturel non nul n, les 9 coéfficients de la matrice A^n.

6) Déterminer, à partir de 4), une matrice B vérifiant $B^2 = A$.

$\boxed{\textbf{Exercice 7}}$ (Extrait de : Centrale 2020)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$\mathcal{S}_n$ désignera le groupe des permutations de $\{1, \ldots, n\}$.

On dit que deux permutations σ et τ de $\mathcal{S}_n$ sont *conjuguées* s'il existe une permutation $\rho \in \mathcal{S}_n$ telle que

$$\tau = \rho\sigma\rho^{-1}$$

$\rho\sigma$ désignant la composée $\rho \circ \sigma$.

À toute permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n$, on associe la matrice de permutation $P_\sigma = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définie par

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ } si \text{ } i = \sigma(j) \\ 0 \text{ } sinon \end{cases}$$

1) Pour toutes permutations ρ et ρ' de $\mathcal{S}_n$, montrer que $P_{\rho\rho'} = P_\rho P_{\rho'}$

2) En déduire que pour toutes permutations $\sigma, \tau \in \mathcal{S}_n$, si σ et τ sont conjuguées alors P_σ et P_τ sont semblables.

Solution

$$(P_\sigma)_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = \sigma(j) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Soient $i, j \in [\![1, n]\!]$.

Montrons que $(P_{\rho\rho'})_{ij} = (P_\rho \cdot P_{\rho'})_{ij}$

On a : $(P_\rho P_{\rho'})_{ij} = \sum_{k=1}^{n} (P_\rho)_{ik} (P_{\rho'})_{kj}$

$$(P_{\rho'})_{kj} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = \rho'(j) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$(P_\rho P_{\rho'})_{ij} = \underbrace{\left(\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq \rho'(j)}}^{n} (P_\rho)_{ik} \underbrace{(P_{\rho'})_{kj}}_{=0} \right)}_{=0} + (P_\rho)_{i\rho'(j)} \times 1$$

$$(P_\rho P_{\rho'})_{ij} = (P_\rho)_{i\rho'(j)}$$

Il s'agit de montrer $(P_{\rho\rho'})_{ij} = (P_\rho)_{i\,\rho'(j)}$

$$(P_\sigma)_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = \sigma(j) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$(P_{\rho\rho'})_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = (\rho\rho')(j) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$(P_\rho)_{i\,\rho'(j)} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = \rho(\rho'(j)) = (\rho\rho')(j) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

D'où $\boxed{(P_{\rho\rho'})_{ij} = (P_\rho)_{i\,\rho'(j)}}$ $\square$

Méthode 2 :

$$\left(P_\sigma\right)_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = \sigma(j) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} = \delta_{i\,\sigma(j)}$$

Mq : $\boxed{\left(P_{\rho\rho'}\right)_{ij} = \left(P_\rho \cdot P_{\rho'}\right)_{ij}}$

On a :

$$\left(P_\rho P_{\rho'}\right)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \left(P_\rho\right)_{ik} \left(P_{\rho'}\right)_{kj}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \delta_{i\,\rho(k)} \cdot \delta_{k\,\rho'(j)}$$

$$= \delta_{i\,\rho(\rho'(j))} \times 1 \quad \text{car } \begin{cases} \forall k \neq \rho'(j) \\ \delta_{k\,\rho'(j)} = 0 \end{cases}$$

$$= \delta_{i\,(\rho\circ\rho')(j)}$$

$\left(P_\sigma\right)_{ij} = \delta_{i\,\sigma(j)}$

$$= \left(P_{\rho\circ\rho'}\right)_{ij}$$

Exercice 7 (Extrait de : Centrale 2020)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$\mathcal{S}_n$ désignera le groupe des permutations de $\{1, \dots, n\}$.

On dit que deux permutations σ et τ de $\mathcal{S}_n$ sont *conjuguées* s'il existe une permutation $\rho \in \mathcal{S}_n$ telle que

$$\tau = \rho\sigma\rho^{-1}$$

$\rho\sigma$ désignant la composée $\rho \circ \sigma$.

À toute permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n$, on associe la matrice de permutation $P_\sigma = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définie par

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = \sigma(j) \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

1) Pour toutes permutations ρ et ρ' de $\mathcal{S}_n$, montrer que $P_{\rho\rho'} = P_\rho P_{\rho'}$

2) En déduire que pour toutes permutations $\sigma, \tau \in \mathcal{S}_n$, si σ et τ sont conjuguées alors P_σ et P_τ sont semblables.

2) Supp que $\tau = \rho\sigma\rho^{-1}$.
M que P_σ et P_τ sont semblables.

On a : $P_\tau = P_{\rho\sigma\rho^{-1}}$
$\overset{1^\circ/}{=} P_\rho \cdot P_\sigma \cdot P_{\rho^{-1}}$

D'autre part :

P_ρ est inversible et $(P_\rho)^{-1} = P_{\rho^{-1}}$; en effet :

$P_\rho P_{\rho^{-1}} \overset{1^\circ/}{=} P_{\rho\rho^{-1}} = P_{id} = I_n$

D'où $\boxed{P_\rho \in GL_n(\mathbb{C}) \text{ et } (P_\rho)^{-1} = P_{\rho^{-1}}}$

Enfin $P_\tau = P_\rho P_\sigma (P_\rho)^{-1}$

et donc P_τ et P_σ sont semblables.

□

Exercice 8 (Extrait de : Centrale 2020)

Soient g une application de $\mathbb{N}^*$ vers $\mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

Soient $M' = (m'_{ij})$ et $D = (d_{ij})$ deux matrices complexes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définies par :

$$d_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } j \text{ divise } i \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \quad \text{et } m'_{ij} = \begin{cases} g(j) \text{ si } j \text{ divise } i \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Posons $M = M'D^T$, où D^T désigne la transposée de D.

Montrer que

$$det(M) = \prod_{k=1}^{n} g(k)$$

Solution :

$$M = M' \cdot D^T$$

$$\det(M) = \det(M') \cdot \det(D^T)$$

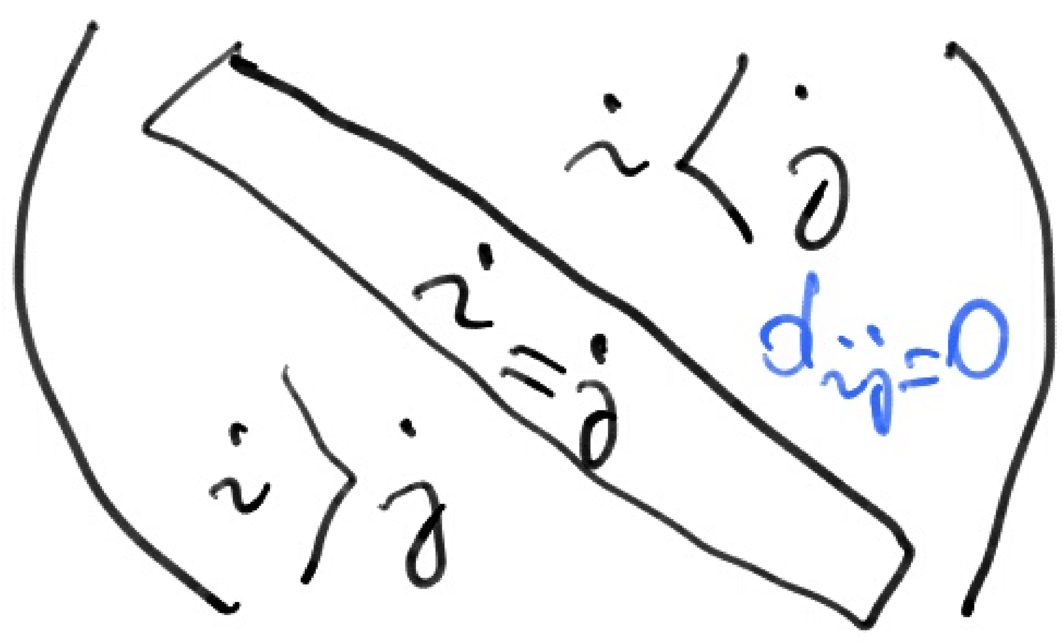
$$= \det(M') \cdot \det(D)$$

$\boxed{\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)}$

$\boxed{\det(A^T) = \det(A)}$

Si $j > i$, $\begin{cases} d_{ij} = 0 \text{ car } j \nmid i \\ m'_{ij} = 0 \text{ car } j \nmid i \end{cases}$

Ainsi M' et D sont triangulaires inférieures.



Alors $\begin{cases} \det(M') = \prod_{i=1}^{n} m'_{ii} \\ \det(D) = \prod_{i=1}^{n} d_{ii} \end{cases}$

Et on a $\begin{cases} d_{ii} = 1 \text{ car } i / i \\ m'_{ii} = g(i) \text{ car } i / i \end{cases}$

D'où $\begin{cases} \det(M') = \prod_{i=1}^{n} g(i) \\ \det(D) = \prod_{i=1}^{n} 1 = 1 \end{cases}$

Avec $\det(M) = \det(M') \cdot \det(D)$, on obtient :

$$\boxed{\det(M) = \prod_{i=1}^{n} g(i)}$$