Solution : Rédigée par « K. Mekouar »

1) Il s'agit de montrer que : $(\exists! c \in \mathbb{R} / \int_0^1 (F_0 + c) = 0)$

Soit $c \in \mathbb{R}$, on a : $\int_0^1 (F_0 + c) = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 F_0 + \underbrace{\int_0^1 c}_{= c} = 0$

$\Leftrightarrow c = -\int_0^1 F_0$

D'où l'existence d'un tel c

N.B : Soit $f \in E$

1) On a : $\begin{cases} i) \ (\varphi(f))' = f \\ ii) \ \int_0^1 \varphi(f) = 0 \end{cases}$

2) $\varphi(f) = S \Leftrightarrow \begin{cases} i) \ S' = f \\ ii) \ \int_0^1 S = 0 \end{cases}$ Ω

2)a) Si $f \in E$ alors $\varphi(f) \in E$ car une primitive d'une fonction est aussi une fonction polynomiale.

2)b) $\varphi : E \to E$
$f \mapsto \varphi(f)$

M.q. que φ est linéaire

Soient f et $g \in E$, soit $\alpha \in \mathbb{R}$

M.q. que $\varphi(\alpha f + g) = \alpha \varphi(f) + \varphi(g)$

« On applique Ω »

Il s'agit de m. que $\begin{cases} i) \ (\alpha \varphi(f) + \varphi(g))' = \alpha f + g \\ ii) \ \int_0^1 (\alpha \varphi(f) + \varphi(g)) = 0 \end{cases}$

ce qui est simple à vérifier puisqu'on a par déf :

$\begin{pmatrix} (\varphi(f))' = f \\ \int_0^1 \varphi(f) = 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} (\varphi(g))' = g \\ \int_0^1 \varphi(g) = 0 \end{pmatrix}$

3)a) $\rightarrow \operatorname{Ker}(\varphi) = ?$

Soit $f \in E$, on a : $f \in \operatorname{Ker}(\varphi) \Leftrightarrow \varphi(f) = 0 \overset{\text{déf}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} i) \ 0' = f \\ ii) \ \int_0^1 0 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow f = 0$

Ainsi : $f \in \operatorname{Ker}(\varphi) \Leftrightarrow f = 0$

$\longrightarrow \operatorname{Ker}(\varphi) = \{0\}$

$\longrightarrow \varphi$ est donc injective

3) b) $F = 1$

F n'a pas d'antécédent ; en effet :

Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe $g \in E / \varphi(g) = F$

alors : $\begin{cases} i) \ F' = g \\ ii) \int_0^1 F = 0 \end{cases}$

D'où $1 = 0$; ce qui est absurde !

3) c) Soit $F \in E$

$\left(\begin{array}{c} F \text{ admet un antécédent} \\ \text{Par } \varphi \end{array}\right) \Leftrightarrow (\exists g \in E / \varphi(g) = F) \Leftrightarrow \left(\exists g \in E / \begin{cases} i) \ \overset{\text{tjs vrai}}{F' = g} \\ ii) \int_0^1 F = 0 \end{cases}\right)$

$\Leftrightarrow \int_0^1 F = 0$

c/c : Les fonctions $F \in E$ admettant un antécédent

Par φ sont les fonctions F telles que : $\int_0^1 F = 0$

4) FTRI $(n = 1)$

$$f(b) = \sum_{k=0}^{1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \int_a^b \frac{(b-t)^1}{1!} \cdot f^{(2)}(t)\,dt$$

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \int_a^b (b-t) f''(t)\,dt$$

5) a) $G(0) = G(x) + G'(x)(-x) + \int_x^0 (-t) G''(t)\,dt$

$G(1) = G(x) + G'(x)(1-x) + \int_x^1 (1-t) G''(t)\,dt$

5) b) Soit $x \in [0,1]$; Tq que :

$$F(x) - \int_0^x t f(t)\,dt = (x-1)F(x) + \int_x^1 (1-t) f(t)\,dt$$

On a : $\left\| \begin{array}{l} \int_0^1 F = 0 = G(1) \\ G(0) = 0 \\ F' = f \\ G' = F \\ G'' = f \end{array} \right.$

$$G(1)-G(0)=0 \Leftrightarrow G(x)+G'(x)(1-x)+\int_x^1 (1-t)\,G''(t)\,dt - G(x)+xG'(x)+\int_x^0 t\,G''(t)\,dt=0$$

$$\Leftrightarrow xG'(x)+\int_x^0 tG''(t)\,dt = -G'(x)(1-x)-\int_x^1 (1-t)\,G''(t)\,dt$$

$$\Leftrightarrow xF(x)-\int_0^x t f(t)\,dt = (x-1)F(x)-\int_x^1 (1-t)f(t)\,dt$$

CQFD

5)c) En déduire que: $\forall x\in[0,1]$; $|F(x)| \leq \frac{x^2+(1-x)^2}{2}\cdot\|f\|$

On a d'après 5)b) : $xF(x)-\int_0^x t f(t) = (x-1)F(x)-\int_x^1 (1-t)f(t)\,dt$

$$\Leftrightarrow xF(x)-(x-1)F(x) = \int_0^x t f(t)\,dt - \int_x^1 (1-t)f(t)\,dt$$

$$\Leftrightarrow F(x) = \int_0^x t f(t)\,dt - \int_x^1 (1-t)f(t)\,dt$$

$$\Rightarrow |F(x)| = \left|\int_0^x t f(t)\,dt - \int_x^1 (1-t)f(t)\,dt\right|$$

$$\Leftrightarrow |F(x)| \leq \left|\int_0^x t f(t)\,dt\right| + \left|\int_x^1 (1-t)f(t)\,dt\right|$$

or $\left|\int_0^x t f(t)\,dt\right| \leq \underbrace{\left(\sup_{t\in[0,1]}|f(t)|\right)}_{=\|f\|}\cdot\int_0^x \underbrace{|t|}_{=t}\,dt$

et $\left|\int_x^1 (1-t)f(t)\,dt\right| \leq \left(\sup_{t\in[0,1]}|f(t)|\right)\int_x^1 |1-t|\,dt$

d'où $|F(x)| \leq \|f\| \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^x + \|f\|\left[-\frac{(1-t)^2}{2}\right]_x^1$

$$\Leftrightarrow |F(x)| \leq \|f\|\,\frac{x^2}{2} + \|f\|\left(\frac{(1-x)^2}{2}\right)$$

c/c : $\forall x\in[0,1]$: $|F(x)| \leq \|f\|\left(\frac{x^2+(1-x)^2}{2}\right)$

Rappel: si $a\leq b$ alors:

$$\left|\int_a^b f(t)g(t)\,dt\right| \leq \left(\sup_{t\in[a,b]}|f(t)|\right)\cdot\int_a^b |g(t)|\,dt$$

5)d) Trouvons une constante K (indépendante de x) telle que:

$$\forall x\in[0,1] : |F(x)| \leq K\cdot\|f\|$$

Astuce : Le meilleur majorant de la fonction $h : x \longmapsto \frac{x^2+(1-x)^2}{2}$ sur $[0,1]$ est $\left(\sup_{x\in[0,1]}(h(x))\right)$. On peut le tirer via les variations de h sur $[0,1]$.

$\rightarrow h(x) = \frac{x^2+(1-x)^2}{2} \Rightarrow h'(x) = \frac{2x-2(1-x)}{2} = x-(1-x) = 2x-1$

Tableau de variations de h sur $[0,1]$

x	0		$1/2$		1
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
h	$1/2$	$\searrow$		$\nearrow$	$1/2$

D'où $\sup_{x\in[0,1]}\left(\frac{x^2+(1-x)^2}{2}\right) = \frac{1}{2} = k$

En fin : $\forall x \in [0,1] : |F(x)| \leq k\|f\|$ $\quad (k=\frac{1}{2})$

Commentaire : Soit $f \in E$; $F = \varphi(f)$; $k = \frac{1}{2}$

On vient de m. que : $(\forall x \in [0,1], |F(x)| \leq k.\|f\|)$

D'où $\left(\sup_{x\in[0,1]}|F(x)|\right) \leq k.\|f\|$

c.à.d : $\|F\| \leq k\|f\|$

$$\underbrace{\left\{\forall f \in E;\ \|\varphi(f)\| \leq k.\|f\|\right\}}$$

5) e) Trouvons une fonction polynomiale non nulle f vérifiant l'égalité :

$\|\varphi(f)\| = \frac{1}{2}\|f\|$

$\rightarrow$ Rappel : $\varphi(f)$ est caractérisée par : $\begin{cases} (\varphi(f))' = f \\ \int_0^1 \varphi(f) = 0 \end{cases}$

On a : $\begin{cases} (\varphi(f))' = 1 \\ \int_0^1 \varphi(f) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varphi^{\circ}(f) = x + c \\ \int_0^1 \varphi(f) = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 (x+c)\,dx \Leftrightarrow c = -\frac{1}{2} \end{cases}$

Ainsi on a $\begin{cases} f = 1 \\ \varphi(f) = x - \frac{1}{2} \end{cases}$

D'une part on a :

$$\boxed{\frac{1}{2}\|f\| = \frac{1}{2}} \quad (\alpha)$$

et : $\|\varphi(f)\| = \sup_{x\in[0,1]} |x - \frac{1}{2}|$

et on a : $\forall x \in [0,1]$: $-\frac{1}{2} \leq x - \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}$

$\Rightarrow (\forall x \in [0,1],\ |x - \frac{1}{2}| \leq \frac{1}{2})$

or $\frac{1}{2} = |1 - \frac{1}{2}|$ alors $\sup_{x\in[0,1]} |x - \frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$ (c'est le max)

D'où $\boxed{\|\varphi(f)\| = \frac{1}{2}} \quad (\beta)$

(α) et (β) $\Rightarrow \|\varphi(1)\| = \frac{1}{2}\|1\|$

Fin