

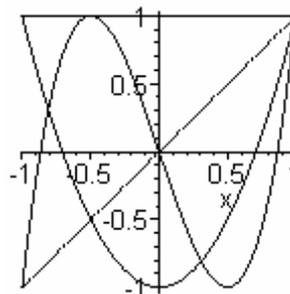
Correction

1.a $f_0(x) = 1, f_1(x) = x, f_2(x) = 2x^2 - 1$ et $f_3(x) = 4x^3 - 3x$.

1.b $f_{n+1}(x) + f_{n-1}(x) = \cos((n+1)\theta) + \cos((n-1)\theta)$ en posant $\theta = \arccos x$

pour nous alléger la vie. Via $\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$, on

obtient : $f_{n+1}(x) + f_{n-1}(x) = 2 \cos \theta \cos n\theta = 2x f_n(x)$.



1.c Unicité : Si T_n et U_n sont solutions alors pour tout $x \in [-1,1]$,

$T_n(x) = U_n(x)$ et donc x est racine de $T_n - U_n$. Ce polynôme ayant une infinité de racines, on peut conclure qu'il est nul et que $T_n = U_n$.

Existence : Raisonnons par récurrence double sur $n \in \mathbb{N}$.

Pour $n = 0$ et $n = 1$: $T_0 = 1$ et $T_1 = X$ nous convient à l'extase d'avoir déterminé deux sublimes solutions.

Supposons la propriété établie au rang n et $n-1$ (avec $n \geq 1$).

$f_{n+1}(x) = 2x f_n(x) - f_{n-1}(x) = 2x T_n(x) - T_{n-1}(x) = T_{n+1}(x)$ en posant $T_{n+1} = 2X T_n - T_{n-1}$ qui est bien un polynôme. Récurrence établie.

$T_0 = 1, T_1 = X, T_2 = 2X^2 - 1, T_3 = 4X^3 - 3X$ et $T_4 = 8X^4 - 8X^2 + 1$.

2.a Par récurrence double sur $n \in \mathbb{N}$, montrons $\deg T_n = n$.

La propriété est vraie, ô joie, aux rangs $n = 0$ et $n = 1$.

Supposons la propriété établie aux rangs n et $n-1$ (avec $n \geq 1$).

$T_{n+1} = 2X T_n - T_{n-1}$ avec $\deg 2X T_n = n+1$ et $\deg T_{n-1} = n-1$. Par somme de polynôme de degré distincts : $\deg T_{n+1} = \max(\deg(2X T_n), \deg(T_{n-1})) = n+1$. Récurrence établie.

Notons

Les coefficients dominants de T_0 et T_1 valent 1.

Pour $n \geq 1$, on voit par l'étude ci-dessus on voit que le coefficient dominant de T_{n+1} est le double de celui de T_n . On peut donc conclure que le coefficient dominant de T_0 vaut 1 et celui de T_n vaut 2^{n-1} pour $n \geq 1$.

2.b Soit $x \in [-1,1]$ une racine de T_n . Pour $\theta = \arccos x \in [0, \pi]$ on a $x = \cos \theta$ et $T_n(x) = \cos n\theta = 0$ donc il

existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi$ puis $\theta = \frac{(2k+1)\pi}{2n}$. Sachant $\theta \in [0, \pi]$, on peut affirmer

$k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$.

Ainsi $x = \cos \frac{\pi}{2n}, \cos \frac{3\pi}{2n}, \dots$, ou $\cos \frac{(2n-1)\pi}{2n}$.

Inversement, on vérifie aisément que, ces éléments sont des racines de T_n dans $[-1,1]$. Ainsi les racines

de T_n dans $[-1,1]$ sont exactement les x_0, \dots, x_{n-1} avec $x_k = \cos \frac{(2k+1)\pi}{2n}$. Pour $k \in \{0, \dots, n-1\}$ les

$\frac{(2k+1)\pi}{2n}$ sont des éléments deux à deux distincts de $[0, \pi]$. La fonction cosinus étant injective sur $[0, \pi]$,

on peut dire que les x_0, \dots, x_{n-1} sont deux à deux distincts. Le polynôme T_n possède donc exactement n racines dans l'intervalle $[-1,1]$. Or $\deg T_n = n$, on peut donc affirmer qu'il n'y a pas d'autres racines et que ces dernières sont simples.

2.c Par récurrence double sur $n \in \mathbb{N}$, montrons que T_n et n ont même parité.

Pour $n = 0$ ou $n = 1$: ok

Supposons la propriété établie aux rangs n et $n-1$ (avec $n \geq 1$)

Si n est pair alors T_n est pair, T_{n-1} impair et $T_{n+1} = 2XT_n - T_{n-1}$ est impair.

Si n est impair alors T_n est impair, T_{n-1} pair et $T_{n+1} = 2XT_n - T_{n-1}$ est pair.

Récurrence établie.

- 3.a $T_n(\cos \theta) = f_n(\cos \theta) = \cos(n \arccos(\cos \theta)) = \cos(n\theta)$ que $\theta \in [0, \pi]$ ou par parité que $\theta \in [-\pi, 0]$ ou encore par périodicité que $\theta \in \mathbb{R}$.

La deuxième relation s'établit par récurrence double sur $n \in \mathbb{N}$.

Pour $n = 0$ et $n = 1$: ok.

Supposons la propriété établie aux rangs n et $n-1$ (avec $n \geq 1$)

$T_{n+1}(\operatorname{ch} \theta) = 2 \operatorname{ch} \theta \operatorname{ch} n\theta - \operatorname{ch}(n-1)\theta$ or $\operatorname{ch}(n+1)\theta + \operatorname{ch}(n-1)\theta = 2 \operatorname{ch} \theta \operatorname{ch} n\theta$ donc

$T_{n+1}(\operatorname{ch} \theta) = \operatorname{ch}(n+1)\theta$.

Récurrence établie.

- 3.b Si $|x| \leq 1$ alors $T_n(x) = f_n(x) = \cos(n \arccos x) \in [-1, 1]$.

Si $x > 1$ alors il existe $\theta > 0$ tel que $x = \operatorname{ch} \theta$ et alors $T_n(x) = \operatorname{ch} n\theta > 1$ donc $|T_n(x)| > 1$.

Par raison de parité : si $x < -1$ alors $|T_n(x)| > 1$.

4. L'équation $|T_n(x)| = 1$ ne peut avoir de solution que dans $[-1, 1]$.

Soit $x \in [-1, 1]$ solution de cette équation.

Il existe un unique $\theta \in [0, \pi]$ tel que $x = \cos \theta$.

$|T_n(x)| = 1$ donne alors $|\cos n\theta| = 1$ donc $\exists k \in \mathbb{Z}, n\theta = k\pi$ i.e. $\theta = k\pi/n$.

Or $\theta \in [0, \pi]$ donc $k \in \{0, \dots, n\}$ et finalement x est l'un des $\cos \frac{k\pi}{n}$ avec $k \in \{0, \dots, n\}$. Inversement,

ces éléments sont bien racines de l'équation $|T_n(x)| = 1$. Posons $a_k = \cos \frac{k\pi}{n}$. On observe :

$-1 = a_n < a_{n-1} < \dots < a_1 < a_0 = 1$. Il y a donc exactement $n+1$ solutions et les solutions des équations $T_n(x) = 1$ sont alternées avec les solutions de l'équation $T_n(x) = -1$ car $T_n(a_k) = \cos(k\pi) = (-1)^k$.

- 5.a Par ce qui précède $\|T_n\| = 1$ car $\forall x \in [-1, 1], |T_n(x)| \leq 1$ et que $T_n(1) = 1$.

Par suite $\|\tilde{T}_n\| = \frac{1}{2^{n-1}}$.

- 5.b \tilde{T}_n et P sont unitaires et de degré n donc $\deg D < n$.

- 5.c $D(\cos \frac{k\pi}{n}) = \frac{(-1)^k}{2^{n-1}} - P(\cos \frac{k\pi}{n})$.

Si k est pair alors $D(\cos \frac{k\pi}{n}) = \frac{1}{2^{n-1}} - P(\cos \frac{k\pi}{n}) \geq \frac{1}{2^{n-1}} - \|P\| > 0$.

Si k est impair alors $D(\cos \frac{k\pi}{n}) = \frac{-1}{2^{n-1}} - P(\cos \frac{k\pi}{n}) \leq \frac{-1}{2^{n-1}} + \|P\| < 0$.

Pour $k \in \{0, \dots, n\}$ les $\cos \frac{k\pi}{n}$ sont des valeurs successives entre lesquelles la fonction D change de signe, or celle-ci est continue donc elle s'annule entre ces valeurs successives : cela fournit au moins n annulations du polynôme D or $\deg D < n$ donc $D = 0$ et $P = \tilde{T}_n$ ce qui est absurde puisque $\|P\| < \|\tilde{T}_n\|$.

Fin et bon courage !

