# Fonctions Usuelles

## Exercice 1 :

Simplifier les expressions suivantes :

1) $A = \left(e^{x^2}\right)^{\frac{\ln(x^{\frac{1}{x}})}{x}}$ ; $B = x^{\frac{\ln(\ln x)}{\ln x}}$ ; $C = \log_x(\log_x x^{x^y})$

2) $A = \arccos(\sin \frac{\pi}{3})$ ; $B = \arcsin(\sin \frac{174\pi}{7})$ ; $C = \arccos(\sin \frac{27\pi}{5})$ ;
$D = \arctan(\tan \frac{26\pi}{5})$

## Exercice 2 :

Calculer les limites suivantes :
$L_1 = \lim_{x\to 0} x^{\frac{1}{x}}$ ; $L_2 = \lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}}$ ; $L_3 = \lim_{x\to 0} x^{\sqrt{x}}$ ; $L_4 = \lim_{x\to 0} x^{x^x}$ ;
$L_5 = \lim_{x\to 0}(x^x)^x$ ; $L_6 = \lim_{x\to+\infty} \frac{(x^x)^x}{x^{x^x}}$ ; $L_7 = \lim_{x\to+\infty} \frac{xe^x}{3^x}$

## Exercice 3 :

1) Montrer que

$$\frac{\cos p - \cos q}{\sin p + \sin q} = -\tan \frac{p-q}{2}$$

2) En déduire que $\tan \frac{\pi}{24} = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}$

## Exercice 4 :

1) Simplifier pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\arctan(\tanh x) - \arctan(e^{2x})$

2) Simplifier :

   a) $argch(2x^2 - 1)$

   b) $argsh\left(2x\sqrt{1+x^2}\right)$

## Exercice 5 :

Considérons la fonction $f$ définie par : $f(x) = \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$

1) Déterminer le domaine de définition de $f$.

2) Calculer $f'(x)$.

3) Que peut-on déduire ?

## Exercice 6 :

Considérons la fonction $f$ définie par : $f(x) = \arcsin\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)$

1) Déterminer le domaine de définition de $f$.

2) En posant $x = \tan t$, trouver une expression simplifiée de $f(x)$.

**Exercice 7 :**

Considérons la fonction $f$ définie par : $f(x) = \arcsin\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)$

1) Déterminer le domaine de définition de $f$.

2) En posant $x = \sin t$, trouver une expression simplifiée de $f(x)$.

**Exercice 8 :**

1) Montrer que

$$\forall\, t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[ \setminus \{0\},\ \frac{1-\cos t}{\sin t} = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$$

2) En déduire une simplification de $\arctan\left(\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right)$, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.

**Exercice 9 :**

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

1) Montrer que si $a \neq 0$ alors

$$\sum_{k=0}^{n} \cosh(ka) = \frac{\cosh(\frac{na}{2})\sinh\left(\frac{(n+1)a}{2}\right)}{\sinh(\frac{a}{2})}$$

2) Calculer $\sum_{k=0}^{n} \cosh(a+kb)$ et $\sum_{k=0}^{n} \sinh(a+kb)$

**Exercice 10 :**

Résoudre l'équation $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$

**Exercice 11 :**

Considérons la fonction $f$ définie par : $f(x) = (x-2)e^x + (x+2)$.
Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ f(x) \succeq 0$$

**Exercice 12 :**

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$\left(\frac{1+\tanh x}{1-\tanh x}\right)^n = \frac{1+\tanh(nx)}{1-\tanh(nx)}$$

**Exercice 13 :**

1) Montrer que $\left(\forall p \in \mathbb{N},\ \arctan(p+1) - \arctan(p) = \arctan\left(\frac{1}{p^2+p+1}\right)\right)$

2) En déduire $\lim_{n\to+\infty} S_n$ ; où $S_n = \sum_{p=0}^{n} \arctan\left(\frac{1}{p^2+p+1}\right)$.