Corrigé du Concours National Commun
Épreuve de Mathématiques I
Session 2022 - Filière MP

m.laamoum@gmail.com

Exercice
Calcul d'intégrales

0.1

0.1.1 On a $X^2 + 2\lambda X + 1 = (X - z_1)(X - z_2)$ donc $z_1 + z_2 = -2\lambda$ et $z_1 z_2 = 1$.

0.1.2 Soit $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z_1 = e^{i\theta}$, alors $z_2 = \dfrac{1}{z_1} = e^{-i\theta}$, on en déduit que $\lambda = -\cos\theta$ ce qui contredit $\lambda \in \mathbb{C}\backslash [-1, 1]$.

0.1.3 De la question précédente $|z_1| \neq 1$ et $|z_2| \neq 1$ (z_1 et z_2 jouent un rôle symétrique) et $|z_1| |z_2| = 1$, forcement l'une des deux racines est plus petite en module que 1 et l'autre et plus grande que 1 , par exemple $0 < |z_1| < 1 < |z_2|$.

0.2 La décomposition en éléments simples s'écrit : $\dfrac{1}{P_\lambda(X)} = \dfrac{a}{X - z_1} + \dfrac{b}{X - z_1}$ avec

$$a = \left[\frac{X - z_1}{P_\lambda(X)}\right]_{X=z_1} = \frac{1}{z_1 - z_2} \quad \text{et} \quad b = \left[\frac{X - z_2}{P_\lambda(X)}\right]_{X=z_2} = \frac{1}{z_2 - z_2}$$

Ainsi

$$\frac{1}{P_\lambda(X)} = \frac{1}{z_1 - z_2}\left(\frac{1}{X - z_1} - \frac{1}{X - z_2}\right)$$

0.3

0.3.1 Soit $x \in \mathbb{R}$, la formule d'Euler donne

$$\begin{aligned} F_\lambda(x) &= \frac{2}{2\lambda + e^{ix} + e^{-ix}} \\ &= \frac{2e^{ix}}{e^{2ix} + 2\lambda e^{ix} + 1} \\ &= \frac{2e^{ix}}{P_\lambda\left(e^{ix}\right)} \end{aligned}$$

0.3.2 De la question 0.2 on a

$$\begin{aligned} F_\lambda(x) &= \frac{2e^{ix}}{z_1 - z_2}\left(\frac{1}{e^{ix} - z_1} - \frac{1}{e^{ix} - z_2}\right) \\ &= \frac{2}{z_1 - z_2}\left(\frac{e^{ix}}{e^{ix} - z_1} - \frac{1}{e^{ix} - \frac{1}{z_1}}\right) \quad (\text{ car } z_1 z_2 = 1 \text{ }) \\ &= \frac{2}{z_1 - z_2}\left(\frac{1}{1 - e^{-ix} z_1} + \frac{z_1 e^{ix}}{1 - e^{ix} z_1}\right) \end{aligned}$$

0.3.3 On a $0 < |z_1| < 1$ et $|z_1^n \cos(nx)| \leq |z_1|^n$, la série $\sum\limits_{n\geq 1} |z_1|^n$ converge donc $\sum\limits_{n\geq 1} z_1^n \cos(nx)$ est absolument convergente.
Nous avons

$$\frac{1}{1 - e^{-ix} z_1} = \sum_{n=0}^{+\infty} z_1^n e^{-inx}$$

et

$$\begin{aligned} \frac{z_1 e^{ix}}{1 - e^{ix} z_1} &= \sum_{n=0}^{+\infty} z_1^{n+1} e^{i(n+1)x} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} z_1^n e^{inx} \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} F_\lambda(x) &= \frac{2}{z_1-z_2}\left(1+\sum_{n=1}^{+\infty} z_1^n\left(e^{inx}+e^{-inx}\right)\right) \\ &= \frac{2}{z_1-z_2}\left(1+2\sum_{n=1}^{+\infty} z_1^n\cos(nx)\right). \end{aligned}$$

0.4

0.4.1 On a $\sup_{x\in\mathbb{R}}|w_n(x)| = |z_1|^n$ et $|z_1|<1$ donc la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} w_n$ converge normalement et uniformément sur $\mathbb{R}$.

0.4.2 Soit $p\in\mathbb{N}$ et $t\in[-\pi,\pi]$,de la question 0.3.3 on a

$$\cos(pt)F_\lambda(t) = \frac{\cos(pt)}{\lambda+\cos t} = \frac{2}{z_1-z_2}\left(\cos(pt)+2\sum_{n=1}^{+\infty} z_1^n\cos(pt)\cos(nt)\right).$$

Soit $f_n : t\mapsto z_1^n\cos(pt)\cos(nt)$, la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ et donc sur $[-\pi,\pi]$, le théorème d'interversion de $\sum$ et $\int$ donne

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos(pt)}{\lambda+\cos t}dt = \frac{2}{z_1-z_2}\left(\int_{-\pi}^{\pi}\cos(pt)dt+2\sum_{n=1}^{+\infty} z_1^n\int_{-\pi}^{\pi}\cos(pt)\cos(nt)dt\right).$$

De la formule

$$\cos(pt)\cos(nt) = \frac{1}{2}\left(\cos((p+n)\,t)+\cos((p-n)\,t)\ \right)$$

on a

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos(pt)\cos(nt)dt = \begin{cases} 0 & \text{si } n\neq p \\ \pi & \text{si } n=p \quad (\neq 0)\end{cases}$$

On distinguant les cas $p\neq 0$ et $p=0$, on obtient

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos(pt)}{\lambda+\cos t}dt = \frac{4\pi z_1^p}{z_1-z_2}.$$

Et par parité on a

$$\boxed{\int_{0}^{\pi}\frac{\cos(pt)}{\lambda+\cos t}dt = \frac{2\pi z_1^p}{z_1-z_2}.}$$

0.5 Si $\lambda=2$ alors $z_1=-2+\sqrt{3}$ et $z_2=-2-\sqrt{3}$ donc

$$\boxed{\int_{0}^{\pi}\frac{\cos(nt)}{2+\cos t}\ dt = \frac{\pi\sqrt{3}\left(-2+\sqrt{3}\right)^n}{3}}$$

Si $\lambda=\cosh a_.$ avec $a>0$, alors alors $z_1=e^{-a}$ et $z_2=e^{a}$ donc

$$\boxed{\int_{0}^{\pi}\frac{\cos(nt)}{\cos t+\cosh a}dt = \frac{-\pi e^{-na}}{\sinh(a)}}$$

Problème

Étude d'une série entière

1$^{\text{ère}}$ Partie

Quelques résultats préliminaires

1.1 Soit $\varphi : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $\varphi'' \leq 0$ et $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$.

1.1.1 Soit $t \in [0,1]$, on fait une intégration par partie

$$\begin{aligned}\int_0^t (t-s)\varphi''(s)ds &= [(t-s)\varphi'(s)]_0^t + \int_0^t \varphi'(s)ds \\ &= -t\varphi'(0) + \varphi(t) - \varphi(0) \\ &= -t\varphi'(0) + \varphi(t)\end{aligned}$$

d'où $\boxed{\varphi(t) = t\varphi'(0) + \int_0^t (t-s)\varphi''(s)ds \quad (1)}$.

1.1.2 On écrit la relation pour $t = 1$ on obtient :

$$\varphi(1) = 0 = \varphi'(0) + \int_0^1 (1-s)\varphi''(s)ds$$

par suite $\boxed{\varphi'(0) = -\int_0^1 (1-s)\varphi''(s)ds \quad (2)}$.

1.1.3 Soit $t \in [0,1]$, les relations (1) et (2) donnent

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= -t\int_0^1 (1-s)\varphi''(s)ds + \int_0^t (t-s)\varphi''(s)ds \\ &= \int_0^t (st-s)\varphi''(s)ds + \int_t^1 (ts-t)\varphi''(s)ds \\ &= \int_0^t (st-\min(s,t))\varphi''(s)ds + \int_t^1 (st-\min(s,t))\varphi''(s)ds\end{aligned}$$

d'où $\boxed{\varphi(t) = -\int_0^1 (\min(s,t) - st)\varphi''(s)ds\ .}$

1.1.4 Soit $(s,t) \in [0,1]^2$, on a

$$\min(s,t) - st = \begin{cases} s(1-t) \text{ si } s \in [0,t] \\ t(1-s) \text{ si } s \in [t,1] \end{cases}$$

donc $0 \leq \min(s,t) - st \leq t(1-t)$. L'application $x \mapsto x(1-x)$ atteint son maximum en $x = \frac{1}{2}$ d'où :
$\boxed{0 \leq \min(s,t) - st \leq \frac{1}{4}\ .}$

On a $\varphi'' \leq 0$ et $\varphi(t) = -\int_0^1 (\min(s,t) - st)\varphi''(s)ds$ donc

$$0 \leq \varphi(t)0 \leq -\frac{1}{4}\int_0^1 \varphi''(s)ds = \frac{\varphi'(0) - \varphi'(1)}{4}$$

ainsi $\boxed{\forall t \in [0,1]\,, \quad 0 \leq \varphi(t) \leq \frac{\varphi'(0) - \varphi'(1)}{4}}$.

1.2

1.2.1 Il suffit de montrer que l'intégrale $\int_2^{+\infty} \frac{1}{t\ln^2 t}\,dt$ converge .
On a pour $x > 2$

$$\int_2^x \frac{1}{t\ln^2 t}\,dt = \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln x}$$

donc $\int_2^x \frac{1}{t\ln^2 t}\,dt \underset{x\to+\infty}{\to} \frac{1}{\ln 2}$, ainsi la fonction $t \longmapsto \frac{1}{t\ln^2 t}$ est intégrable sur l'intervalle $[2,+\infty[$ et
$\boxed{\int_2^{+\infty} \frac{1}{t\ln^2 t}\,dt = \frac{1}{\ln 2}}$.

1.2.2 La fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{t\ln^2 t}$ est continue positive et décroissante sur $[2,+\infty[$, du théorème de comparaison série et intégrale on déduit que la série $\sum_{n\geqslant 2} \dfrac{1}{n\ln^2 n}$ est convergente.

1.3

1.3.1 Pour $x>-1$, $\quad f'_\alpha(x)=\alpha(1+x)^{\alpha-1}$ donc $(1+x)f'_\alpha(x)-\alpha f_\alpha(x)=0$.

1.3.2 Soit $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ de rayon de convergence $R>0$ et $r=\min(R,1)$, on suppose que $\psi : x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, est solution de (1) sur l'intervalle $]-r,r[$.

(i) Soit $x\in\,]-r,r[$, on a $\psi'(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$ et

$$\begin{array}{rcl}(1+x)\psi'_\alpha(x) & = & \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}+\sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n\\ & = & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n+\sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n\\ & = & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left((n+1)a_{n+1}+na_n\right)x^n\end{array}$$

comme $(1+x)\psi'_\alpha(x)=\alpha\psi_\alpha(x)$ alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left((n+1)a_{n+1}+na_n\right)x^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\alpha a_n x^n$$

ainsi

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left((n+1)a_{n+1}+(n-\alpha)a_n\right)x^n=0\quad\forall x\in\,]-r,r[$$

par unicité du DSE de la fonction nulle on a $\boxed{\forall\, n\in\mathbb{N},\quad (n+1)a_{n+1}=(\alpha-n)a_n.}$

(ii) La relation précédente donne pour $n\in\mathbb{N}$

$$\begin{array}{rcl}a_{n+1} & = & \dfrac{\alpha-n}{n+1}a_n\\ & = & \dfrac{\alpha-n}{n+1}\dfrac{\alpha-n+1}{n}\cdots\dfrac{\alpha}{1}a_0\\ & = & \dbinom{\alpha}{n+1}a_0\end{array}$$

D'où $\boxed{\forall\, n\in\mathbb{N}^*, a_n=\dbinom{\alpha}{n}a_0.}$

(iii) On a $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\left|\dfrac{\alpha-n}{n+1}\right|\underset{n\to+\infty}{\rightarrow}1$, d'après la règle de d'Alembert $\rho=1$.
Soit $\psi : x\longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty}\dbinom{\alpha}{n}x^n$ pour $x\in\,]-1,1[$.
Par la même méthode que (i) on a

$$(1+x)\psi'_\alpha(x)-\alpha\psi_\alpha(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\left((n+1)\binom{\alpha}{n+1}+(n-\alpha)\binom{\alpha}{n}\right)x^n=0$$

donc ψ est solution de (1) sur l'intervalle $]-1,1[$.

1.3.3 Le problème de Cauchy

$$\left\{\begin{array}{c}(1+x)y'-\alpha y=0\quad\forall x\in\,]-1,1[\\ y(0)=1\end{array}\right.$$

admet une solution unique , les fonctions ψ et $x \mapsto (1+x)^\alpha$ sont solutions de ce problème donc elles coïncident sur $]-1,1[$, ainsi $\boxed{\forall x \in]-1,1[\,,\ (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n}$.

$2^{\text{ème}}$ Partie
Calcul du rayon de convergence et de la somme de la série entière en question

2.1 Soit $t \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}$, on a $\binom{t}{0} = 1$, $\binom{t}{1} = t \leq 1$, si $n \geq 2$

$$\left|\binom{t}{n}\right| = \frac{t(1-t)...(n-1-t)}{n!} \leq \frac{1.2...(n-1)}{n!} \leq 1\ .$$

2.2 On a

$$|b_n| \leq \int_0^1 \left|\binom{t}{n}\right| dt \leq 1$$

donc $R_1 \geq R_{cv}(\sum_{n\geq 0} z^n) = 1$.

2.3 Soit $x \in]-1,1[$. On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions définies sur le segment $[0,1]$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [0,1]\,, \quad u_n(t) = \binom{t}{n} x^n$$

2.3.1 Soit $t \in [0,1]$, on a $|u_n(t)| = \left|\binom{t}{n} x^n\right| \leq |x|^n$ donc $\sup_{t\in[0,1]} |u_n(t)| \leq |x|^n$, la série $\sum |x|^n$ converge donc $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge normalement sur $[0,1]$.

2.3.2 Soit $x \in]-1,1[$. La série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge normalement et uniformément sur $[0,1]$, le théorème d'interversion de $\sum$ et $\int$ donne

$$\int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t)\ dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 u_n(t)\ dt$$

on a $\int_0^1 u_n(t)\ dt = b_n x^n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{t}{n} x^n = (1+x)^t$, ce qui donne

$$\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n = \int_0^1 (1+x)^t dt$$

de plus

$$\int_0^1 (1+x)^t\ dt = \int_0^1 e^{t\ \ln(1+x)}\ dt = \frac{x}{\ln(1+x)}$$

d'où $\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n = \int_0^1 (1+x)^t dt = \frac{x}{\ln(1+x)}}$.

2.4

2.4.1 Soit $x \in]0,2[$, on a $x-1 \in]-1,1[$ donc $f(x-1) = \dfrac{x-1}{\ln(x)} \underset{x\to 0^+}{\sim} \dfrac{-1}{\ln x}$.

2.4.2 On a $f(x-1) \underset{x\to 0^+}{\sim} \dfrac{-1}{\ln x}$ donc $f(x-1) \underset{x\to 0^+}{\to} +\infty$ et $f(t) \underset{t\to -1^+}{\to} +\infty$, ce qui est absurde car f est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[-1,1] \subset]-R_1, R_1[$ (elle doit être bornée sur $[-1,1]$) , donc $R_1 \leq 1$. D'après 2.2 $R_1 \geq 1$ donc $R_1 = 1$.

$3^{\text{ème}}$ Partie
Étude du comportement de la série entière aux bornes de son intervalle de convergence

3.1 On considère la suite $(v_n)_{n\geqslant 2}$ de fonctions définies sur le segment $[0,1]$ par :

$$\forall n \geqslant 2, \forall t \in [0,1], \quad v_n(t) = \ln\left(1-\frac{t}{n}\right) - t\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)$$

3.1.1 Soit $n \geqslant 2$ et $t \in [0,1]$, on a

$$\sum_{k=2}^{n} v_k(t) = \sum_{k=2}^{n} \ln\left(1-\frac{t}{k}\right) - t\sum_{k=2}^{n}\ln\left(1-\frac{1}{k}\right)$$

et

$$\sum_{k=2}^{n}\ln\left(1-\frac{1}{k}\right) = \sum_{k=2}^{n}\ln(k-1)-\ln(k) = -\ln(n).$$

donc $\sum\limits_{k=2}^{n} v_k(t) = h_n(t)$.

3.1.2 Soit $t \in [0,1]$, on a $v_n'(t) = \dfrac{1}{t-n} - \ln\left(1-\dfrac{1}{n}\right)$ et $v"_n(t) = \dfrac{-1}{(t-n)^2}$ donc $v"_n \leq 0$ de plus $v_n(0) = v_n(1) = 0$.
D'après 1.1.4 on a $0 \leq v_n(t) \leq \dfrac{v_n'(0)-v_n'(1)}{4}$, $v_n'(0) = -\dfrac{1}{n} - \ln\left(1-\dfrac{1}{n}\right)$ et $v_n'(1) = -\dfrac{1}{n-1} - \ln\left(1-\dfrac{1}{n}\right)$ donc $0 \leqslant v_n(t) \leqslant \dfrac{1}{4(n-1)} - \dfrac{1}{4n}$.

3.1.3 On a pour tout $t \in [0,1]$

$$0 \leqslant v_n(t) \leqslant \frac{1}{4(n-1)} - \frac{1}{4n} = \frac{1}{4n(n-1)}$$

donc $\sup\limits_{t\in[0,1]} |v_n(t)| \leqslant \dfrac{1}{4n(n-1)}$, la série $\sum \frac{1}{4n(n-1)}$ converge donc $\sum\limits_{n\geqslant 2} v_n$ converge normalement sur $[0,1]$.

3.1.4 h_n est la somme partielle de la série $\sum\limits_{n\geqslant 2} v_n$ qui converge normalement donc uniformément sur $[0,1]$, par suite la suite de fonctions $(h_n)_{n\geqslant 2}$ converge uniformément sur le segment $[0,1]$ vers une fonction notée h.
Chaque fonction h_n est continue sur $[0,1]$ et $(h_n)_{n\geqslant 2}$ converge uniformément vers h donc h est continue sur $[0,1]$.

3.2

3.2.1 Soit $t \in]0,1[$, pour tout $k \geq 1$ on a $t-k \leq 0$ donc $\dbinom{t}{n}$ est du signe de $(-1)^{n-1}$ et $(-1)^{n-1}b_n \geq 0$ par suite $b_n = (-1)^{n-1}|b_n|$.

3.2.2 Soit $n \geqslant 2$,

$$\begin{aligned}(n+1)|b_{n+1}| &= \frac{(-1)^n}{n!}\int_0^1 t(t-1)\cdots(t-n)dt \\ &= \int_0^1 t(1-t)(1-\frac{t}{2})\cdots(1-\frac{t}{n})dt\end{aligned}$$

Pour $k \geqslant 2$ on a $(1-\dfrac{t}{k}) = e^{\ln(1-\frac{t}{k})} = e^{v_k(t)+t\ln(1-\frac{1}{k})}$ donc

$$\begin{aligned}(1-\frac{t}{2})\cdots(1-\frac{t}{n}) &= \exp\left(\sum_{k=2}^{n} v_k(t) + t\ln(1-\frac{1}{k})\right) \\ &= \exp\left(h_n(t) + t\sum_{k=2}^{n}\ln(k-1)-\ln(k)\right) \\ &= e^{h_n(t)-t\ln(n)}\end{aligned}$$

d'où $\boxed{\forall n \geqslant 2,\ (n+1)|b_{n+1}| = \int_0^1 t(1-t)e^{-t\ln n}e^{h_n(t)}dt.}$

3.2.3 On a pour tout $t \in [0,1]$ $0 \leqslant v_n(t) \leqslant \frac{1}{4(n-1)} - \frac{1}{4n} = \frac{1}{4n(n-1)}$ et $h(t) - h_n(t) = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k(t)$ donc

$$0 \leqslant h(t) - h_n(t) \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\frac{1}{4(k-1)} - \frac{1}{4k} \right)$$

on calcul cette somme télescopique :

$$\begin{aligned} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\frac{1}{4(k-1)} - \frac{1}{4k} \right) &= \lim_{N\to+\infty} \sum_{k=n+1}^{N} \left(\frac{1}{4(k-1)} - \frac{1}{4k} \right) \\ &= \lim_{N\to+\infty} \left(\frac{1}{4n} - \frac{1}{4N} \right) \\ &= \frac{1}{4n} \end{aligned}$$

d'où $\boxed{\forall n \geqslant 2 \ , \ \forall t \in [0,1] \, , 0 \leqslant h(t) - h_n(t) \leqslant \frac{1}{4n}.}$

3.2.4 Soit $n \geqslant 2$ et $t \in [0,1]$, on a $h(t) - \dfrac{1}{4n} \leqslant h_n(t) \leqslant h(t)$, la question 3.2.2 donne l'encadrement

$$e^{-\frac{1}{4n}} \int_0^1 t(1-t)e^{-t\ln n} e^{h(t)} dt \leqslant (n+1)\left|b_{n+1}\right| \leqslant \int_0^1 t(1-t)e^{-t\ln n} e^{h(t)} dt$$

3.2.5 On fait le changement $s = t\ln n$, on obtient

$$\int_0^1 t(1-t)e^{-t\ln n} e^{h(t)} dt = \frac{1}{\ln^2 n} \int_0^{\ln n} s e^{-s} \left(1 - \frac{s}{\ln n}\right) e^{h\left(\frac{s}{\ln n}\right)} ds$$

3.2.6 On note g la fonction définie sur l'intervalle $[0,+\infty[$ par :

$$\forall t \geqslant 0, \quad g(t) = (1-t)e^{h(t)} \text{ si } t \in [0,1] \text{ et } g(t) = 0 \quad \text{si} \quad t > 1.$$

(i) g est continue sur $[0,1[$ et sur $]1,+\infty[$, et $\displaystyle\lim_{x\to1^+} g(x) = \lim_{x\to1^-} g(x) = g(1) = 0$, donc g est continue sur $[0,+\infty[$.

(ii) h est continue sur $[0,1]$ donc elle est bornée, par suite g est bornée sur $[0,+\infty[$, soit M sa borne supérieure (g est positive).
La fonction $w_n : s \mapsto s e^{-s} g\left(\frac{s}{\ln n}\right)$ est dominée par $\varphi : s \mapsto M s e^{-s}$ qui est intégrable sur $[0,+\infty[$, de plus (w_n) converge simplement vers $w : s \mapsto s e^{-s} g(0)$, avec $g(0) = e^{h(0)} = 1$.
D'après le théorème de la convergence dominée on a

$$\int_0^{+\infty} s e^{-s} g\left(\frac{s}{\ln n}\right) ds \underset{n\to+\infty}{\to} \int_0^{+\infty} s e^{-s} ds$$

une intégration par partie donne $\displaystyle\int_0^{+\infty} s e^{-s} ds = 1$. D'où $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} s e^{-s} g\left(\frac{s}{\ln n}\right) ds \underset{n\to+\infty}{\to} 1}$

(iii) Des questions 3.2.4 et 3.2.5 on a

$$e^{-\frac{1}{4n}} \frac{1}{\ln^2 n} \int_0^{\ln n} s e^{-s} g\left(\frac{s}{\ln n}\right) ds \leqslant (n+1)\left|b_{n+1}\right| \leqslant \frac{1}{\ln^2 n} \int_0^{\ln n} s e^{-s} g\left(\frac{s}{\ln n}\right) ds$$

et $\displaystyle\int_0^{+\infty} s e^{-s} g\left(\frac{s}{\ln n}\right) ds = \int_0^{\ln n} s e^{-s} g\left(\frac{s}{\ln n}\right) ds + \int_{\ln n}^{+\infty} s e^{-s} g\left(\frac{s}{\ln n}\right) ds.$
La domination donne

$$\left| \int_{\ln n}^{+\infty} s e^{-s} g\left(\frac{s}{\ln n}\right) ds \right| \leq M \int_{\ln n}^{+\infty} s e^{-s} ds$$

et on a par partie

$$\begin{aligned} \int_{\ln n}^{+\infty} s e^{-s} ds &= \left[-s e^{-s} - e^{-s}\right]_{\ln n}^{+\infty} \\ &= \frac{1 + \ln n}{n} \end{aligned}$$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \int\limits_{\ln n}^{+\infty} se^{-s} g\left(\frac{s}{\ln n}\right) ds = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^{\ln n} se^{-s} g\left(\frac{s}{\ln n}\right) ds = \lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} se^{-s} g\left(\frac{s}{\ln n}\right) ds = 1$, ainsi $(n+1)\ln^2(n)\ |b_n| \underset{n\to+\infty}{\to} 1 \dfrac{1}{n\ln^2 n}$ on en déduit :

$|b_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n\ln^2 n}$ et $b_n = (-1)^{n-1}|b_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n\ln^2 n}$.

3.3

3.3.1 On a $\sup\limits_{x\in[-1,1]} |b_n x^n| = |b_n|$ et $|b_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n\ln^2 n}$, d'après 1.2.2 la série $\sum\limits_{n\geq 2} \frac{1}{n\ln^2 n}$ converge donc la série $\sum\limits_{n\geq 0} b_n x^n$ converge normalement sur $[-1,1]$.

3.3.2 D'après la question 2.3.2 on a, pour tout $x \in]-1,1[$, $\quad f(x) = \dfrac{x}{\ln(1+x)}$, la série $\sum\limits_{n\geq 0} b_n x^n$ converge normalement et uniformément sur $[-1,1]$ et donc sur $]-1,1[$ et chaque fonction $x \mapsto b_n x^n$ admet une limte à gauche en 1 , le théorème d'interversion de limite et $\sum$ donne :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} b_n = \lim_{nx\to 1^-} \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n = \lim_{nx\to 1^-} f(x)$$

d'où $\boxed{\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} b_n = \frac{1}{\ln 2}}$.

3.3.3 La série $\sum\limits_{n\geq 0}(-1)^n b_n$ converge absolument donc converge .

D'après la question précédente

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n b_n = \lim_{nx\to -1^+} \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n = \lim_{nx\to -1^+} f(x)$$

d'où $\boxed{\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n b_n = 0}$.