Chap 4

Nombres réels

I) Rappels et Compléments

1) Valeur absolue

Déf 1

Soit $x \in \mathbb{R}$, $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$

Prop 2

Soient $x, y \in \mathbb{R}$. On a :

1) $|x| \geqslant 0$

2) $|-x| = |x|$

3) $|xy| = |x| \cdot |y|$

4) $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$ (si $y \neq 0$)

5) $|x|^2 = |x^2| = x^2$

6) $\forall n \in \mathbb{N}$, $|x^n| = |x|^n$

7) $\begin{cases} |x| \geqslant x \\ |x| \geqslant -x \end{cases}$

8) $|x| = 0 \iff x = 0$

9) $|x-y|=0 \iff x=y$

10) $|x|=|y| \iff x=\pm y$

11) $||x||=|x|$

12) $\forall n\in\mathbb{N}\ ,\ |(-1)^n|=1$

13) $\sqrt{x^2}=|x|$

14) $\forall x\in\mathbb{R}^+,\ \sqrt{x^2}=x$

15) $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \forall (x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, on a :

$$\left|\prod_{k=1}^{n} x_k\right| = \prod_{k=1}^{n} |x_k|$$

Prop 3 (Inégalité triangulaire)

Soient $x,y\in\mathbb{R}$. On a :

1) $|x+y| \leq |x|+|y|$ (Inégalité triangulaire)

2) $|x+y| = |x|+|y| \iff$ (x et y sont de même signe)

Corollaire 4 (Inégalité triangulaire généralisée)

Soient $n\in\mathbb{N}^*$ et $(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$. On a :

$$\left|\sum_{k=1}^{n} x_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |x_k| \quad \text{(Inégalité triangulaire généralisée)}$$

Corollaire 5

Soient $x, y \in \mathbb{R}$. On a :

1) $|x-y| \leqslant |x| + |y|$

2) $\big||x| - |y|\big| \leqslant |x-y|$

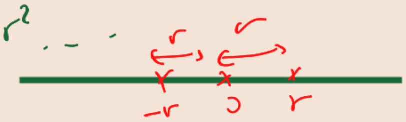
Démo

Calquée sur celles vues dans les nombres complexes.

Prop 6

Démo : $x^2 - r^2$ . . .

Schéma



Soient $x, y \in \mathbb{R}$ et $r \geqslant 0$. On a :

1) i) $|x| \leqslant r \iff -r \leqslant x \leqslant r$

ii) $|x| < r \iff -r < x < r$

2) i) $|x| \geqslant r \iff (x \leqslant -r \text{ ou } x \geqslant r)$

ii) $|x| > r \iff (x < -r \text{ ou } x > r)$

2) Partie entière

Prop et déf 1

Soit $x \in \mathbb{R}$.

1) Il existe un unique entier relatif m vérifiant :

$$m \leqslant x < m+1$$

2) m s'appelle la partie entière de x, et se note $\lfloor x \rfloor$.

N B

$\lfloor x \rfloor$ se note aussi $E(x)$ ou $[x]$.

Exemples

x	$1,17$	$-1,17$	-8	m où $m \in \mathbb{Z}$
$\lfloor x \rfloor$	1	-2	-8	m
Car	$1 \leq 1,17 < 2$	$-2 \leq -1,17 < -1$	$-8 \leq -8 < -7$	$m \leq m < m+1$

Prop 2

1) $\forall x \in \mathbb{R},\ \lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$.

2) $\lfloor x \rfloor = p \iff \begin{cases} p \leq x < p+1 \\ p \in \mathbb{Z} \end{cases}$

3) i) $\forall x \in \mathbb{R},\ \lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$

ii) $\forall x \in \mathbb{R},\ x-1 < \lfloor x \rfloor \leq x$

4) $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall m \in \mathbb{Z},\ \lfloor x+m \rfloor = \lfloor x \rfloor + m$

5) i) $\forall m \in \mathbb{Z},\ \lfloor m \rfloor = m$

ii) $\forall x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\lfloor x \rfloor = x \iff x \in \mathbb{Z}$$

Démo

3) ii) $\forall x \in \mathbb{R},\ x-1 \leqslant \lfloor x \rfloor \leqslant x$?

On a $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1 \Rightarrow \lfloor x \rfloor \leqslant x \leqslant \lfloor x \rfloor + 1$

$\Rightarrow x-1 \leqslant \lfloor x \rfloor \leqslant x$

4) $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall m \in \mathbb{Z},\ \lfloor x+m \rfloor = \lfloor x \rfloor + m$?

On a $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1 \Rightarrow (\lfloor x \rfloor + m) \leqslant x+m < (\lfloor x \rfloor + m) + 1$

Or $(\lfloor x \rfloor + m) \in \mathbb{Z}$, alors $\lfloor x+m \rfloor = \lfloor x \rfloor + m$

5) ii) Soit $x \in \mathbb{R}$. M que

$\lfloor x \rfloor = x \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$

$(\Leftarrow)$

C'est 5)i).

$(\Rightarrow)$

Supp que $\lfloor x \rfloor = x$.

Or $\lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$, alors $x \in \mathbb{Z}$.

Attention

L'égalité « $\lfloor x+y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$ » est en général fausse.

Contre-exemple :

$$\underbrace{\lfloor 3{,}4 + 4{,}7 \rfloor}_{=8} \neq \underbrace{\lfloor 3{,}4 \rfloor}_{3} + \underbrace{\lfloor 4{,}7 \rfloor}_{4}$$

Réflexes à avoir

Ici $x \in \mathbb{R}$ et $m \in \mathbb{Z}$.

1) $x \geqslant m \Rightarrow \lfloor x \rfloor \geqslant m$

2) $x > m \Rightarrow \lfloor x \rfloor \geqslant m$

3) $x < m \Rightarrow \lfloor x \rfloor < m$

4) $x < m \Rightarrow \lfloor x \rfloor \leqslant m - 1$

Prop 3

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ \exists \, 0 \leqslant \varepsilon < 1 \ , \ x = \lfloor x \rfloor + \varepsilon$$

Démo

Soit $x \in \mathbb{R}$.

On a $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1 \Rightarrow 0 \leqslant x - \lfloor x \rfloor < 1$

Posons $\varepsilon = x - \lfloor x \rfloor$.

On a alors : $\begin{cases} x = \lfloor x \rfloor + \varepsilon \\ 0 \leqslant \varepsilon < 1 \end{cases}$

$\square$

Prop 4 (Croissance de la partie entière)

Soient $x, y \in \mathbb{R}$. On a :

$$x \leqslant y \Rightarrow \lfloor x \rfloor \leqslant \lfloor y \rfloor$$

Autrement dit

La fonction partie entière $x \longmapsto \lfloor x \rfloor$ est Croissante sur $\mathbb{R}$.

Démo

Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Supp que $x \leq y$ et mq que $\lfloor x \rfloor \leq \lfloor y \rfloor$.

On a $\begin{cases} \lfloor x \rfloor \leq x \leq \lfloor x \rfloor + 1 \\ x \leq y \end{cases}$

D'où $\underbrace{\lfloor x \rfloor}_{\in \mathbb{Z}} \leq y$.

Par suite $\lfloor x \rfloor \leq \lfloor y \rfloor$. (Réflexes ci-dessus)

$\square$

NB

1) $x < y \Rightarrow \lfloor x \rfloor \leq \lfloor y \rfloor$

2) Attention !

i) L'implication suivante est en général fausse.

« $x < y \Longrightarrow \lfloor x \rfloor < \lfloor y \rfloor$ »

Car on a par exemple $1,2 < 1,3$ mais $\lfloor 1,2 \rfloor \not< \lfloor 1,3 \rfloor$

ii) Autrement dit, la fonction partie entière n'est pas strictement Croissante.

Exercice 3 : (de la série d'exercices)

Montrer que

1) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x+y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$

2) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R},\ \left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$

Solution

1) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x+y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$

Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. M. que $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leqslant \lfloor x+y \rfloor \leqslant \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$

Il y a plusieurs manières de la traiter, en voici une :

On a : $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$

$\Rightarrow \lfloor x \rfloor + y \leqslant x + y < \lfloor x \rfloor + 1 + y$

$\Rightarrow \begin{cases} \lfloor \lfloor x \rfloor + y \rfloor \leqslant \lfloor x+y \rfloor \leqslant \lfloor \lfloor x \rfloor + 1 + y \rfloor \\ \text{car la fonction partie entière est } \underline{\text{croissante}}. \end{cases}$

Or $\begin{cases} \lfloor \lfloor x \rfloor + y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \text{ car } \lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z} \\ \lfloor \lfloor x \rfloor + 1 + y \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1 + \lfloor y \rfloor \text{ car } \lfloor x \rfloor + 1 \in \mathbb{Z} \end{cases}$

Alors, $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leqslant \lfloor x+y \rfloor \leqslant \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$ $\square$

2) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R},\ \left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$. Mq que $\left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$

Là encore on peut faire par au moins deux méthodes.

Voici une :

On sait que :

$$\exists\ 0 \leq \varepsilon < 1 \text{ tel que } x = \lfloor x \rfloor + \varepsilon$$

Alors $nx = n\lfloor x \rfloor + n\varepsilon$

$\left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$?

$$\Rightarrow \begin{cases} \lfloor nx \rfloor = n\lfloor x \rfloor + \lfloor n\varepsilon \rfloor \\ \text{Car } n\lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} = \lfloor x \rfloor + \frac{\lfloor n\varepsilon \rfloor}{n}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor + \left\lfloor \frac{\lfloor n\varepsilon \rfloor}{n} \right\rfloor \\ \text{Car } \lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Vérifions que $\left\lfloor \frac{\lfloor n\varepsilon \rfloor}{n} \right\rfloor = 0$:

On a $0 \leq \varepsilon < 1 \Rightarrow 0 \leq n\varepsilon < n$

$$\Rightarrow 0 \leq \lfloor n\varepsilon \rfloor \leq n-1$$

$$\Rightarrow 0 \leqslant \frac{\lfloor n\varepsilon \rfloor}{n} \leqslant 1 - \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow 0 \leqslant \frac{\lfloor n\varepsilon \rfloor}{n} < 1$$

D'où $\left\lfloor \frac{\lfloor n\varepsilon \rfloor}{n} \right\rfloor = 0$

☆ devient : $\left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$ $\square$

Vocab :

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$(x - \lfloor x \rfloor)$ s'appelle la partie fractionnaire de x.

Exemple

1) i) La partie fractionnaire de $2{,}25$ est $0{,}25$.

ii) La partie décimale de $2{,}25$ est $0{,}25$.

2) i) La partie fractionnaire de $\frac{1}{3}$ est $\frac{1}{3} = 0{,}333\ldots$

ii) $\frac{1}{3}$ n'est pas un nombre décimal, du coup, on ne peut pas parler de sa partie décimale.

---

3) Approximation décimale d'un nombre réel

Activité

1) On sait que 3,14 est l'approximation décimale de π à 10^{-2} près par défaut ($\pi = 3,1415\ldots$).

Donner 3,14 en intervenant π et la partie entière.

2) On sait que 3,15 est l'approximation décimale de π à 10^{-2} près par excès ($\pi = 3,1415\ldots$).

Donner 3,15 en intervenant π et la partie entière.

Solution

1) $\pi = 3,1415\ldots$

$10^2 \cdot \pi = 314,15\ldots$

$\lfloor 10^2 \cdot \pi \rfloor = 314$

$10^{-2} \cdot \lfloor 10^2 \cdot \pi \rfloor = 3,14$ $\square$

2) $\pi = 3,1415\ldots$

$10^2 \cdot \pi = 314,15\ldots$

$\lfloor 10^2 \cdot \pi \rfloor = 314$

$\lfloor 10^2 \cdot \pi \rfloor + 1 = 315$

$$10^{-2}\cdot\left(\lfloor 10^{2}\cdot\pi\rfloor+1\right)=3,15$$

En général, on a les définitions suivantes :

Déf

Soient $x\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{N}$.

1) L'approximation décimale de x à 10^{-n} près par défaut est :

$$10^{-n}\cdot\lfloor 10^{n}\cdot x\rfloor$$

2) L'approximation décimale de x à 10^{-n} près par excès est :

$$10^{-n}\cdot\left(\lfloor 10^{n}\cdot x\rfloor+1\right)$$

II) Borne supérieure - Borne inférieure

1) Parties bornées

NB

Dans l'ensemble ordonné $(\mathbb{R},\leq)$, on avait défini les notions suivantes :

Majorant - Minorant - Partie majorée - Partie minorée - Partie bornée.

Prop

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. On a :

$$\boxed{A \text{ bornée} \iff (\exists C \geqslant 0,\ \forall x \in A,\ |x| \leqslant C)}$$

Exemples

Montrer que les parties suivantes sont des parties bornées de $\mathbb{R}$:

1) $A = \{2\sin(3x) - 5\cos(x) \,/\, x \in \mathbb{R}\}$

2) $B = \left\{1 + \frac{(-1)^n}{n} \,/\, n \in \mathbb{N}^*\right\}$

Solution

1) $A = \{2\sin(3x) - 5\cos(x) \,/\, x \in \mathbb{R}\}$

Montrer que A est bornée.

Rappel :

A bornée $\iff (\exists C \geqslant 0,\ \forall x \in A,\ |x| \leqslant C)$

Il s'agit de montrer que :

$$\exists C \geqslant 0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ |2\sin(3x) - 5\cos(x)| \leqslant C$$

Soit alors $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$|2\sin(3x) - 5\cos(x)| \leqslant |2\sin(3x)| + |5\cos x| \quad \text{(inég-triang)}$$

$$= 2\underbrace{|\sin(3x)|}_{\leqslant 1} + 5\underbrace{|\cos x|}_{\leqslant 1}$$

Or $|\sin(3x)| \leqslant 1$ et $|\cos x| \leqslant 1$

Alors $|2\sin(3x) - 5\cos(x)| \leqslant 2+5$

Càd $|2\sin(3x) - 5\cos(x)| \leqslant 7$

Enfin :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ |2\sin(3x) - 5\cos(x)| \leqslant 7 \quad (c = 7 \text{ ici})$$

Par suite A est bornée $\square$

2) $B = \left\{ 1 + \frac{(-1)^n}{n} \,/\, n \in \mathbb{N}^* \right\}$

Montrer que B est bornée.

Càd, montrons que :

$$\left(\exists C \geqslant 0, \ \forall n \in \mathbb{N}^*, \ \left|1 + \frac{(-1)^n}{n}\right| \leqslant C \right)$$

Soit alors $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\left|1 + \frac{(-1)^n}{n}\right| \leqslant |1| + \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| \quad (\text{inég-triang})$$

$$= 1 + \frac{1}{n}$$

Or $n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow n \geqslant 1$

$$\Rightarrow \frac{1}{n} \leqslant 1$$

Alors $\left|1 + \frac{(-1)^n}{n}\right| \leqslant 1+1$

Ainsi : $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \left|1 + \frac{(-1)^n}{n}\right| \leqslant 2 \right)$

D'où B est bornée. $\square$

2) Borne supérieure – Borne inférieure

a) Borne supérieure

Déf 1

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

1) La borne supérieure de A est le plus petit de ses majorants.

« sous réserve d'existence »

2) On la note $\sup(A)$.

NB

1) $\sup(A)$ est un majorant de A.

2) $\forall x \in A,\ x \leq \sup(A)$.

Exemples express

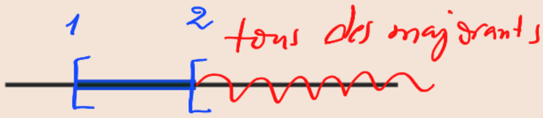
1) $\sup([1,2[) = ?$

2) $\sup([1,2]) = ?$

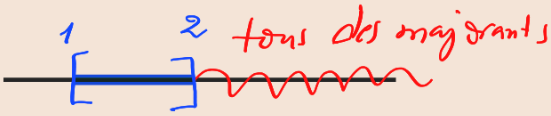
3) $\sup([1,+\infty[) = ?$

Solution

1) $\sup([1,2[) = 2$.



2) $\sup([1,2]) = 2$.



3) $\sup([1,+\infty[)$ n'existe pas ; $[1,+\infty[$ n'est pas majoré.

NB

Sup(A) peut appartenir à A et peut ne pas y appartenir.

Prop 2

Si A possède un plus grand élément max(A), alors c'est sa borne supérieure.

Càd : $\sup(A) = \max(A)$

Rappel

Le plus grand élément de A, noté max(A), est caractérisé par :

$$\begin{cases} 1)\ \max(A) \text{ est un majorant de } A \\ 2)\ \max(A) \in A \end{cases}$$

« sous réserve d'existence »

Démo de prop 2

Supposons que A possède un plus grand élément max(A).

Montrons que $\sup(A) = \max(A)$. Càd que $\begin{cases} \sup(A) \leqslant \max(A) \\ \sup(A) \geqslant \max(A) \end{cases}$

On a $\begin{cases} \max(A) \text{ majorant de } A \\ \sup(A) \text{ majorant de } A \\ \sup(A) \text{ le plus petit des majorants de } A \end{cases}$

D'où $\sup(A) \leqslant \max(A)$

Et on a $\begin{cases} \sup(A) \text{ est un majorant de } A \\ \max(A) \in A \end{cases}$

D'où $\max(A) \leq \sup(A)$

Enfin $\boxed{\max(A) = \sup(A)}$ □

Prop 3 (Existence de la borne supérieure)

Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.

NB

Quand on demande de montrer que $\sup(A)$ existe, on montrera les points suivants :

1) A est une partie non vide de $\mathbb{R}$.
2) A majorée.

Activité

Supposons que $\sup(A) = \alpha$.

i) α est le plus petit des majorants.

Alors : $\left(\forall \varepsilon > 0, (\alpha - \varepsilon) \text{ n'est pas un majorant de } A\right)$ $\left(\text{car } (\alpha - \varepsilon) < \alpha\right)$

$\Rightarrow \left(\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A, \alpha - \varepsilon < x\right)$ (Σ_1)

ii) α est bien sûr un majorant de A

càd : $\left(\forall x \in A, x \leq \alpha\right)$ (Σ_2)

Joignons (Σ_1) et (Σ_2), et on aura la proposition suivante.

Prop 4 (Caractérisation de la borne supérieure)

Soient A une partie non vide de $\mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. On a :

$$\sup(A) = \alpha \iff \begin{cases} \forall x \in A, x \leq \alpha \\ \forall \varepsilon > 0, \exists x \in A, \alpha - \varepsilon < x \end{cases}$$

Conseil

Avec le temps, la plupart des élèves oublient cette caractérisation. Alors je vous conseille de savoir la retrouver comme on a fait dans l'activité ci-dessus.

a) Borne inférieure

Déf 1

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

1) La borne inférieure de A est le plus grand de ses minorants.

« sous réserve d'existence »

2) On la note $\inf(A)$.

NB

1) $\inf(A)$ est un minorant de A.

2) $\forall x \in A,\ x \geq \inf(A)$

Exemples express

1) $\inf([1,2[) = ?$

2) $\inf(]1,2]) = ?$

3) $\inf(]-\infty,3]) = ?$

Solution

1) $\inf([1,2[) = 1$

2) $\inf(]1,2]) = 1$

3) $\inf(]-\infty,3])$ n'existe pas ; $]-\infty,3]$ n'est pas minorée.

NB

$\inf(A)$ peut appartenir à A et peut ne pas y appartenir.

Prop 2

Si A possède un plus petit élément $\min(A)$, alors c'est sa borne inférieure.

Càd : $\inf(A) = \min(A)$

Rappel

Le plus petit élément de A, noté min(A), est caractérisé par:

$$\begin{cases} 1)\ \min(A) \text{ est un minorant de } A \\ 2)\ \min(A) \in A \end{cases}$$

« sous réserve d'existence »

Prop 3 (Existence de la borne inférieure)

Toute partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure.

NB

Quand on demande de montrer que $\inf(A)$ existe, on montrera les points suivants:

> 1) A est une partie non vide de $\mathbb{R}$.
> 2) A minorée.

Activité

Supposons que $\inf(A) = \beta$.

i) β est le plus grand des minorants de A

Alors: $(\forall \varepsilon > 0, (\beta+\varepsilon)$ n'est pas un minorant de $A)$ (car $(\beta+\varepsilon) > \beta$)

$\Rightarrow (\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A, x < \beta + \varepsilon)$ (Σ_1)

ii) β est bien sûr un minorant de A

càd : $(\forall x \in A, \beta \leq x)$ (Σ_2)

Joignons (Σ_1) et (Σ_2), et on aura la proposition suivante.

Prop 4 (Caractérisation de la borne inférieure)

Soient A une partie non vide de $\mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$. On a :

$$\inf(A) = \beta \iff \begin{cases} \forall x \in A, \beta \leq x \\ \forall \varepsilon > 0, \exists x \in A, x < \beta + \varepsilon \end{cases}$$

Conseil

Avec le temps, la plupart des élèves oublient cette caractérisation. Alors je vous conseille de savoir la retrouver comme on a fait dans l'activité ci-dessus.

Réflexes à avoir

$$\sup(A) \leq M \iff (\forall x \in A, x \leq M)$$

$\sup(A)$: le plus petit des majorants

M un majorant de A

$m \leq \inf(A) \iff (\forall x \in A, m \leq x)$

le plus grand des minorants

un minorant

Exemple

Considérons la partie de $\mathbb{R}$:

$$A = \left\{ \frac{1}{n} / n \in \mathbb{N}^* \right\}$$

1) a) Justifier que A possède une borne supérieure.

b) Déterminer $\sup(A)$.

2) a) Justifier que A possède une borne inférieure.

b) Déterminer $\inf(A)$.

Solution

$$A = \left\{ \frac{1}{n} / n \in \mathbb{N}^* \right\}$$

1) a) Justifier que A possède une borne supérieure ?

Il suffit de vérifier que :

$$\begin{cases} i) \ A \neq \emptyset \\ ii) \ A \text{ est majorée} \end{cases}$$

i) $A \neq \emptyset$ car $1 \in A$.

ii) A est majorée, en effet :

$A = \left\{ \frac{1}{n} / n \in \mathbb{N}^* \right\}$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$\frac{1}{n} \leq 1$

D'où A est majorée.

b) Déterminer $\sup(A)$?

On a : $\left(\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \frac{1}{n}\leq 1\right)$

C-à-d que 1 est un majorant de A.

En plus, $1\in A$ (car $1=\frac{1}{1}$ et $1\in\mathbb{N}^*$)

D'où $1=\max(A)$; le plus grand élément de A.

Par suite $\sup(A)=1$

2) a) Justifier que A possède une borne inférieure.

Il suffit de vérifier que :

$$\begin{cases} i)\ A\neq\emptyset \\ ii)\ A \text{ est minorée.} \end{cases}$$

i) $A\neq\emptyset$ (déjà faite)

$A=\left\{\frac{1}{n} \,/\, n\in\mathbb{N}^*\right\}$

ii) A est minorée. En effet :

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On a $\frac{1}{n}\geq 0$

D'où A est minorée.

b) Déterminer $\inf(A)$?

M.q. $\inf(A)=0$

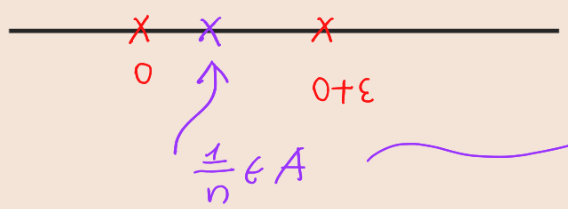
On a 0 minorant de A MAIS $0\notin A$
Alors on ne peut pas conclure via « $\min(A)$ »

Utilisons la caractérisation de la borne inférieure.

Il reste à montrer que :

$$\left(\forall\varepsilon>0,\ \exists n\in\mathbb{N}^*,\ \frac{1}{n}<\varepsilon\right)$$

$A=\left\{\frac{1}{n} \,/\, n\in\mathbb{N}^*\right\}$



Soit alors $\varepsilon > 0$.

Montrons qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{n} < \varepsilon$.

On a

$\lfloor t \rfloor \leq t < \lfloor t \rfloor + 1$

$$\frac{1}{n} < \varepsilon \iff \frac{1}{\varepsilon} < n$$

Or $\frac{1}{\varepsilon} < \lfloor \frac{1}{\varepsilon} \rfloor + 1$ et que $\left(\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \rfloor + 1 \right) \in \mathbb{N}^*$

Alors $n = \lfloor \frac{1}{\varepsilon} \rfloor + 1$ convient.

Enfin $\inf(A) = 0$ $\square$

III) Densité d'une partie de $\mathbb{R}$

1) Intervalles de $\mathbb{R}$

Rappel (Segment de $\mathbb{R}$)

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, avec $a \leq b$.

1) On rappelle que :

$$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} / \ a \leq x \leq b\}$$

2) $[a,b]$ s'appelle segment.

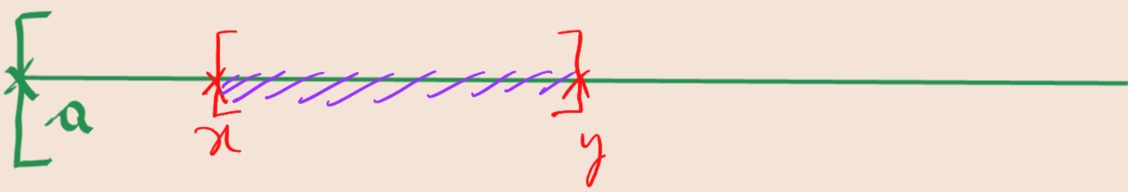
Déf 1

Soit I une partie non vide de $\mathbb{R}$.

I est dit intervalle de $\mathbb{R}$ si et seulement si :

$$\forall (x,y) \in I^2, \text{avec } x \leq y, \text{ on a } [x,y] \subset I$$

Schéma



Convention

$\emptyset$ est par convention un intervalle de $\mathbb{R}$.

Prop 2

Les intervalles de $\mathbb{R}$ sont de l'une des formes suivantes :

1) i) $[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \,/\, a \leq x \leq b\}$

ii) $[a,b[= \{x \in \mathbb{R} \,/\, a \leq x < b\}$

iii) $]a,b] = \{x \in \mathbb{R} \,/\, a < x \leq b\}$

iv) $]a,b[= \{x \in \mathbb{R} \,/\, a < x < b\}$

où $a \leq b$, deux réels.

2) i) $[a,+\infty[= \{x \in \mathbb{R} \,/\, a \leq x\}$

ii) $]a,+\infty[= \{x \in \mathbb{R} \,/\, a < x\}$

iii) $]-\infty,a] = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \leq a\}$

iv) $]-\infty,a[= \{x \in \mathbb{R} \,/\, x < a\}$

3) $]-\infty,+\infty[$, qui est $\mathbb{R}$.

NB

$\emptyset =]a,a[$, où $a \in \mathbb{R}$.

2) Densité

Déf 1

Une partie A de $\mathbb{R}$ est dite dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si entre deux réels distincts existe au moins un élément de A.

Autrement dit

$$A \text{ est dense dans } \mathbb{R} \iff \left(\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \text{ avec } x<y, \exists a \in A, x<a<y\right)$$

Prop 2

Soit $A \subset \mathbb{R}$.

Les propositions suivantes sont équivalentes :

1) A est dense dans $\mathbb{R}$.

2) $\forall x<y \in \mathbb{R}, \exists a \in A, x<a<y$

3) $\forall x<y \in \mathbb{R},]x,y[\cap A \neq \emptyset$

Prop 3

1) $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

2) $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Autrement dit

1) Entre deux réels distincts existe au moins un nombre rationnel.

2) Entre deux réels distincts existe au moins un nombre irrationnel.

NB

Il y a une caractérisation séquentielle, càd avec les suites, de la densité d'une partie A dans $\mathbb{R}$.

On la verra dans le chapitre suivant des « suites ».

IV) Droite numérique achevée

Déf 1

La droite numérique achevée est l'ensemble noté $\overline{\mathbb{R}}$, et qui est défini par :

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \sqcup \{-\infty, +\infty\}$$

NB

1) $\forall x \in \mathbb{R},\ x \in \overline{\mathbb{R}}$.

2) $(-\infty) \in \overline{\mathbb{R}}$ et $(+\infty) \in \overline{\mathbb{R}}$.

Prolongement de l'ordre $\leq$ dans $\overline{\mathbb{R}}$

Soient $x, y \in \overline{\mathbb{R}}$.

1) Si x et $y \in \mathbb{R}$.

« $x \leq y$ » C'est l'ordre connu dans $\mathbb{R}$.

2) Si $x \in \mathbb{R}$.

i) $-\infty \leq x$

ii) $x \leq +\infty$

3) i) $-\infty \leq -\infty$

ii) $+\infty \leq +\infty$

iii) $-\infty \leq +\infty$

Prop 2

1) « $\leq$ » est une relation d'ordre sur $\overline{\mathbb{R}}$.

2) Dans l'ensemble ordonné $(\overline{\mathbb{R}}, \leq)$, toute partie non vide admet une borne supérieure et une borne inférieure.

Exemple express

1) On a $[1,+\infty[\neq \emptyset$ et $[1,+\infty[\subset \overline{\mathbb{R}}$.

$\sup([1,+\infty[) = +\infty \in \overline{\mathbb{R}}$.

2) On a $]-\infty, 2[\neq \emptyset$ et $]-\infty, 2[\subset \overline{\mathbb{R}}$.

$\inf(]-\infty, 2[) = -\infty \in \overline{\mathbb{R}}$.

Fin