CNC Marocain 2019 PSI
Math 2 (Extrait)
« adapté à la première année »
MPSI + PCSI

Exercice 1 :

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ et u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à A.

On note $\chi_A(x) = \det(xI_2 - A)$

1) Calculer le polynôme $\chi_A(x)$ et déterminer ses racines.

   Notons λ_1 et λ_2 ces racines, avec $\lambda_1 < \lambda_2$.

2) Déterminer pour chaque $i \in \{1, 2\}$, le vecteur $e_i \in \mathbb{R}^2$ dont la première composante vaut 1 et vérifiant $u(e_i) = \lambda_i e_i$.

3) Montrer que (e_1, e_2) est une base de $\mathbb{R}^2$, et écrire la matrice D de u relativement à cette base.

4) Exprimer la matrice A en fonction de D.

5) Conclure qu'il existe une matrice inversible P telle que : $A = P \Delta P^{-1}$

   où Δ est une matrice de $M_2(\mathbb{R})$ dont la diagonale est $(0, tr(A))$.

Exercice 2

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

On note v l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A.

Notons $\chi_A(x) = \det(xI_3 - A)$.

1°) Calculer le polynôme $\chi_A(x)$ et en déduire qu'il possède une seule racine λ à préciser.

2°) Déterminer $\ker(v - \lambda\, id_{\mathbb{R}^3})$.

On pose $e_1 = (1,0,0) \in \mathbb{R}^3$.

3°) Calculer $v(e_1)$ et $v^2(e_1)$, puis montrer que la famille $\mathcal{B} = (e_1, v(e_1), v^2(e_1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

4°) i) Justifier que $(v - 2\, id_{\mathbb{R}^3})^3 = 0$

ii) Exprimer le vecteur $v^3(e_1)$ dans la base $\mathcal{B}$, et écrire la matrice B' de v dans cette base.

iii) Exprimer la matrice A en fonction de B'.

iv) Conclure qu'il existe une matrice inversible P telle que : $A = P \Delta P^{-1}$

où Δ est une matrice de $M_3(\mathbb{R})$ dont la diagonale est $(0, 0, tr(A))$