

Algèbre

Partie I

1. $A(0) = 0$, A ne comporte donc pas de termes constants, et se factorise en XB . En outre, A est de degré $2n$, donc B est de degré $2n - 1$. Le coefficient dominant est 1, et de la formule du binôme par exemple, on tire que le terme constant de B est $b_0 = 2n$.
2. On résout d'abord $w^{2n} = 1 \iff w = e^{i\frac{k\pi}{n}}$, pour $k = 0, \dots, 2n - 1$. On en déduit :

$$\begin{aligned} A(z) = 0 &\iff (z + 1)^{2n} = 1 \\ &\iff z = -1 + e^{i\frac{k\pi}{n}}, \text{ pour } k = 0, \dots, 2n - 1 \\ &\iff z = 2i \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right) e^{i\frac{k\pi}{2n}}, \text{ pour } k = 0, \dots, 2n - 1 \end{aligned}$$

3. On effectue le changement de variables $k' = 2n - k$:

$$\begin{aligned} P_n &= \prod_{k'=n+1}^{2n-1} \sin\left(\frac{(2n - k')\pi}{2n}\right) \\ &= \prod_{k=n+1}^{2n-1} \sin\left(\pi - \frac{k\pi}{2n}\right) \\ &= \prod_{k=n+1}^{2n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right). \end{aligned}$$

On a donc $P_n \times P_n = Q_n$, et $P_n = \sqrt{Q_n}$.

4. D'une part, comme B est de degré impair, et est de coefficient dominant 1, le produit de ses racines vaut l'opposé de son terme constant, et :

$$\prod_{k=1}^{2n-1} z_k = -2n.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^{2n-1} z_k &= Q_n 2^{2n-1} e^{i\frac{\pi}{2n}(1+\dots+2n-1)} i^{2n-1} \\ &= Q_n 2^{2n-1} e^{i\frac{\pi}{2n} \frac{(2n-1)2n}{2}} i^{2n-1} \\ &= 2^{2n-1} Q_n e^{i(2n-1)\pi} \\ &= -2^{2n-1} Q_n. \end{aligned}$$

On en déduit que $Q_n = \frac{2n}{2^{2n-2}}$ et $P_n = \frac{\sqrt{2n}}{2^{n-1}}$.

5. On a $F = \frac{1}{A} = \frac{1}{\prod_{k=0}^{2n-1} (X - z_k)} = \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{a_k}{X - z_k}$, avec $a_k = \frac{1}{A'(z_k)}$. Or, $A'(X) = 2n(X+1)^{2n-1}$, et donc :

$$A'(z_k) = 2n(z_k + 1)^{2n-1} = 2n \frac{(z_k + 1)^{2n}}{z_k + 1} = \frac{2n}{z_k + 1}.$$

On en déduit que :

$$a_k = \frac{z_k + 1}{2n}.$$

Partie II

6. Si $f = \lambda I_E$, alors $(\lambda + 1)^{2n} - \lambda = 0$, et donc $\lambda = z_i$.

7. On a $S_1 = 2^{2n} = (1+1)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k}$, et $S_2 = 2^{2n} = (1-1)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \binom{2n}{k}$. On en déduit que :

$$S_1 + S_2 = 2^{2n} = 2 \times \sum_{k=0}^n \binom{2n}{2k},$$

$$S_1 - S_2 = 2^{2n} = 2 \times \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1}.$$

8. Si s est une symétrie, alors $s^{2k} = I_E$ et $s^{2k+1} = s$. Comme I_E et s commutent, l'identité du binôme est vérifiée, et :

$$\begin{aligned} (s + I_E)^{2n} - I_E &= \sum_{k=0}^n \binom{2n}{2k} I_E + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1} s - I_E \\ &= (2^{2n-1} - 1)I_E + 2^{2n-1}s. \end{aligned}$$

En particulier, si l'équation a une solution, s est une homothétie vectorielle qui n'est pas l'identité, et une telle homothétie n'est pas une symétrie. Il n'y a donc pas de symétries qui sont solutions de l'équation.

Partie III

9. On montre très facilement que G est un sous-espace vectoriel. En posant $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, et

$M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, (M_1, M_2) engendre G , et c'est clairement une famille libre. C'est donc une base de G , et $\dim G = 2$.

10.

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1 &\iff \begin{pmatrix} -2b & b & b \\ b & -2b & b \\ b & b & -2b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \\
&\iff \begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x = \frac{y+z}{2} \\ y = \frac{y+3z}{4} \\ x + y - 2z = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x = z \\ y = z \\ z = z \end{cases}
\end{aligned}$$

En posant $e'_1 = (1,1,1)$, on a prouvé que (e'_1) est une base de E_1 .

11.

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1 &\iff \begin{pmatrix} b & b & b \\ b & b & b \\ b & b & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \\
&\iff x + y + z = 0 \\
&\iff \begin{cases} x = -y - z \\ y = y \\ z = z \end{cases}
\end{aligned}$$

On pose $e'_2 = (-1,1,0)$ et $e'_3 = (-1,0,1)$. Ces deux vecteurs sont indépendants, et on vient de prouver qu'ils engendrent E_2 . Ils forment donc une base de E_2 .

12. Nous calculons le rang de ces 3 vecteurs en appliquant la méthode du pivot de Gauss :

$$rg(e'_1, e'_2, e'_3) = rg \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = rg \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = rg \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3.$$

Ces 3 vecteurs sont donc libres, et ils forment une base de E qui est de dimension 3.

13. On a $D(e'_1) = (a+2b)e'_1$, $D(e'_2) = (a-b)e'_2$ et $D(e'_3) = (a-b)e'_3$, soit :

$$D = \begin{pmatrix} a+2b & 0 & 0 \\ 0 & a-b & 0 \\ 0 & 0 & a-b \end{pmatrix}.$$

14. Rappelons que la matrice de passage d'une base à une autre est la matrice des coordonnées des nouveaux vecteurs dans l'ancienne base. Ainsi :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pour l'inverser, on applique aussi par exemple l'algorithme du pivot de Gauss. Nous prenons une

notation matricielle :

$$\begin{aligned}
 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & X \\ 1 & 1 & 0 & Y \\ 1 & 0 & 1 & Z \end{array} \right) &\iff \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & X \\ 0 & 2 & 1 & -X+Y \\ 0 & 1 & 2 & -X+Z \end{array} \right) \\
 &\iff \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & X \\ 0 & 1 & 2 & -X+Z \\ 0 & 0 & -3 & X+Y-2Z \end{array} \right) \\
 &\iff \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & \frac{2X-Y+2Z}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-X+2Y-Z}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-X-Y+2Z}{3} \end{array} \right) ,
 \end{aligned}$$

$$\text{d'où } P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

15. Les formules de changement de base nous disent que $M = PDP^{-1}$.

16. Nous avons :

$$\begin{aligned}
 (M + I)^{2n} - I = 0 &\iff (PDP^{-1} + PP^{-1}) - I = 0 \\
 &\iff P^{2n}(D + I)^{2n}P^{-2n} - P^{2n}P^{-2n} = 0 \\
 &\iff (D + I)^{2n} - I = 0.
 \end{aligned}$$

17. Nous calculons :

$$(D + I)^{2n} - I = \begin{pmatrix} (a+2b+1)^{2n} - 1 & 0 & 0 \\ 0 & (a-b+1)^{2n} - 1 & 0 \\ 0 & 0 & (a-b+1)^{2n} - 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Ceci est équivalent à :

$$\begin{aligned}
 \begin{cases} (a+2b+1)^{2n} &= 1 \\ (a-b+1)^{2n} &= 1 \end{cases} &\iff \begin{cases} a+2b+1 &= e^{i\frac{k\pi}{2n}} \\ a-b+1 &= e^{i\frac{j\pi}{2n}} \end{cases}, k=0, \dots, 2n-1, j=0, \dots, 2n-1 \\
 &\iff \begin{cases} b &= \frac{1}{3}(e^{i\frac{k\pi}{2n}} - e^{i\frac{j\pi}{2n}}) \\ a &= \frac{1}{3}(e^{i\frac{k\pi}{2n}} + 2e^{i\frac{j\pi}{2n}}) - 1 \end{cases}, k=0, \dots, 2n-1, j=0, \dots, 2n-1.
 \end{aligned}$$

18. Les matrices solutions de l'équation (*) qui sont dans G sont les PDP^{-1} , où D est une des matrices déterminée en 17.

FIN

