Fractions rationnelles

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I) Généralités

1) Définitions

Déf 1 :

On appelle fraction rationnelle à coéfficients dans $\mathbb{K}$, toute expression de la forme

$$F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

où P et $Q \in \mathbb{K}[X]$, avec $Q(x) \neq 0$.

NB :

i) $\frac{P_1}{Q_1} = \frac{P_2}{Q_2} \Leftrightarrow P_1 Q_2 = Q_1 P_2$

ii) Un polynôme P est aussi une fraction, car $P = \frac{P}{1}$.

Notation :

$\mathbb{K}(x)$ est l'ensemble des fractions rationnelles à coéfficients dans $\mathbb{K}$.

R/R : $\mathbb{K}[x] \subset \mathbb{K}(x)$

Déf 2 :

Si P et Q sont premiers entre eux, on dit que la fraction $F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ est sous forme irréductible.

Exemple 1 :

$$F_1(X) = \frac{X^2-1}{X^2-3X+2}.$$

$F_1(X)$ est-elle sous forme irréductible ?
Sinon, mettez-la sous forme irréductible.

Réponse

$F_1(X) = \frac{(X+1)(X-1)}{(X-1)(X-2)}$ qui n'est donc pas sous forme irréductible.

Et on a : $F_1(X) = \frac{X+1}{X-2}$, qui est bien sous forme irréductible

Car $(X+1) \wedge (X-2) = 1$,

Rappel :

Si $a \neq b$, alors $(X-a) \wedge (X-b) = 1$

Exemple 2 :

Mêmes question pour la fraction $F_2(X) = \frac{X^2-1}{X^3-1} \in \mathbb{R}[X]$.

Réponse :

$F_2(X) = \frac{X^2-1}{X^3-1} = \frac{(X-1)(X+1)}{(X-1)(X^2+X+1)}$ qui n'est pas sous forme irréd.

Et on a $F_2(X) = \frac{X+1}{X^2+X+1}$ est sous forme irréductible maintenant

Car $(X+1) \wedge (X^2+X+1) = 1$ puisque : $\begin{cases} (X+1) \text{ irréductible dans } \mathbb{R}[X] \\ \text{et } (X+1) \nmid (X^2+X+1) \end{cases}$

Rappels :

1) Soient p un nombre premier et $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$p \wedge n = 1 \iff p \nmid n$$

2) Soient P et $Q \in \mathbb{K}[X]$, avec P irréductible et $Q \neq 0$.

On a :

$$P \wedge Q = 1 \iff P \nmid Q$$

Déf 3 : (degré)

Soit $F = \frac{P}{Q} \in \mathbb{K}(X)$.

Le degré de F est défini par :

$$\deg(F) = \deg(P) - \deg(Q)$$

Exemples :

F	$\frac{X^3+1}{X+2}$	$\frac{X+1}{X^2-X-7}$	$\frac{X^2+1}{X^2-1}$	0	$2X+3$
$\deg(F)$	2	-1	0	$-\infty$	1

NB :

1) $\forall F \in \mathbb{K}(X)$, $\deg(F) \in \mathbb{Z} \sqcup \{-\infty\}$

2) $\deg(F) = -\infty \iff F = 0$

3) $\forall F \in \mathbb{K}(X) \setminus \{0\}$, $\deg(F) \in \mathbb{Z}$

Déf 4 : (Fonction rationnelle)

Soit $F(X) = \frac{P(X)}{Q(X)} \in \mathbb{K}(X)$.

La fonction rationnelle associée à F est la fonction $\tilde{F}$ définie par :

$$\tilde{F} : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$$
$$x \longmapsto \tilde{F}(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

2) Opérations sur les fractions rationnelles

Somme :

$$\frac{P}{Q} + \frac{A}{B} = \frac{PB+QA}{QB}$$

Produit :

$$\frac{P}{Q} \times \frac{A}{B} = \frac{PA}{QB}$$

Multiplication par un scalaire λ de $\mathbb{K}$.

$$\lambda . \frac{P}{Q} = \frac{\lambda P}{Q}$$

Prop :

$(\mathbb{K}(X), +, \times)$ est un corps.

Démo : exo chez-vous.

3°) Zéros et pôles d'une fraction.

Déf :

Soit $F = \frac{P}{Q} \in \mathbb{K}(X)$ écrite sous forme irréductible.

1) Les racines de P sont dits les zéros de la fraction F.

2) Les racines de Q sont dits les pôles de F.

Vocabulaire :

1) La multiplicité d'un zéro de F est sa multiplicité en tant que racine de P.

2) De même, la multiplicité d'un pôle de F est sa multiplicité en tant que racine de Q.

3) On parlera ainsi de pôle simple, double ou multiple.

Exemple 1 :

$$F_1(X) = \frac{X^2-1}{X^2-3X+2} \in \mathbb{R}(X).$$

Déterminer les zéros et les pôles de F_1, et préciser leurs multiplicités.

Solution :

Donc $F_1(X) = \dfrac{X+1}{X-2}$, qui est sa forme irréductible.

Ainsi, on a :

a) (-1) est l'unique zéro de $F_1(X)$, de multiplicité 1.
(zéro simple de $F_1(X)$).

b) 2 est l'unique pôle de $F_1(X)$ de multiplicité 1 (pôle simple).

Exemple 2 :

Mêmes questions pour la fraction $F_2(X) = \dfrac{(X-3)^2(X+4)}{(X+2)(X+3)^2} \in \mathbb{R}(X)$.

Exemple 3 :

Soit $P(X) \in \mathbb{K}(X)$ un polynôme scindé dans $\mathbb{K}$.

Posons $P(X) = \lambda \prod_{k=1}^{r} (X - x_k)^{m_k}$, où $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x_1, \dots, x_r$ ses racines distinctes deux à deux.

$m_k \in \mathbb{N}^*$ la multiplicité de x_k.

Considérons la fraction $F(X) = \dfrac{P'(X)}{P(X)}$.

1) Déterminer $\deg(F)$

2) M que $x_1, \dots, x_r$ sont les pôles de $F(X)$ et qu'ils sont tous simples.

II) Décompositions en éléments simples d'une fraction rationnelle.

1) Partie entière d'une fraction rationnelle

Déf 1 :

Soit $F(X) = \dfrac{A(X)}{B(X)} \in \mathbb{K}(X)$.

La partie entière de $F(X)$ est le polynôme quotient dans la division euclidienne de A par B.

Éclaircissement :

Soit $A = BQ + R$, avec $d^\circ(R) < d^\circ(B)$, la division euclidienne de A par B.

1) $Q(X)$ est la partie entière de la fraction $F(X)$.

2) $$F(X) = \underbrace{Q(X)}_{\substack{\in \mathbb{K}[X] \\ \text{la partie entière}}} + \underbrace{\frac{R(X)}{B(X)}}_{\text{fraction de degré } < 0}$$

NB :

1) Si $F(x)$ est un polynôme $(\in \mathbb{K}[x])$, alors sa partie entière est $E(x)=F(x)$ lui-même.

2) Si $F(x) \in \mathbb{K}(x)$, avec $\deg(F) < 0$, alors sa partie entière est $E(x) = 0$.

2) Décomposition dans $\mathbb{C}(x)$ d'une fraction en éléments simples

Exemples introductifs :

1) $$\frac{1}{(X-1)(X-2)} = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X-2}$$ (degré $< 0 \rightarrow$ partie entière $= 0$)

2) $$\frac{X+20}{(X-1)(X-2)} = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X-2}$$ (degré $< 0 \rightarrow$ partie entière $= 0$)

3) $$\frac{X^5+20}{(X-1)(X-2)} = \underbrace{E(x)}_{\text{sa partie entière}} + \left(\frac{a}{X-1} + \frac{b}{X-2}\right)$$

4) $$\frac{3X^2+X+1}{(X-1)^2(X-2)^3} = \left(\frac{a}{X-1} + \frac{b}{(X-1)^2}\right) + \left(\frac{c}{X-2} + \frac{d}{(X-2)^2} + \frac{e}{(X-2)^3}\right)$$

5) $$\frac{2X^5-X+17}{(X-1)^2(X-2)^2} = \underbrace{E(x)}_{\text{sa partie entière}} + \left(\frac{a}{X-1} + \frac{b}{(X-1)^2}\right) + \left(\frac{c}{X-2} + \frac{d}{(X-2)^2}\right)$$

D'une manière générale, on a :

Prop 2 :

Soit $F(x) = \dfrac{A(x)}{\prod_{k=1}^{r} (X - x_k)^{m_k}} \in \mathbb{K}(x)$ sous forme irréductible.

$F(x)$ s'écrit d'une manière unique sous la forme :

$$F(x) = E(x) + \sum_{k=1}^{r} \left(\sum_{i=1}^{m_k} \frac{a_{ik}}{(X - x_k)^i} \right)$$

où $E(x)$ est sa partie entière et $a_{ik} \in \mathbb{K}$.

Vocabulaire :

Pour chaque $1 \leq k \leq r$, $\left(\sum_{i=1}^{m_k} \frac{a_{ik}}{(X - x_k)^i} \right)$ s'appelle la partie polaire relativement au pôle x_k.

Cas particulier :

Si $F(x) = \dfrac{A(x)}{(X - x_1) \cdots (X - x_n)} \in \mathbb{K}(x)$ sous forme irréductible, et les x_k sont distincts deux à deux, on a :

$$F(x) = \underbrace{E(x)}_{\text{la partie entière de } F(x)} + \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{X - x_k}$$

Par exemple :

$$F(X) = \frac{X+7}{(X-2)^3(X-1)^2} \in \mathbb{R}(X).$$

La partie polaire relativement au pôle 2 est de la forme :

$$\frac{a}{X-2} + \frac{b}{(X-2)^2} + \frac{c}{(X-2)^3}$$

Prop 3 : (Cas d'un pôle simple)

$F(X) = \frac{A(X)}{B(X)} \in \mathbb{K}(X)$ sous forme irréductible.

Soit a un pôle simple de $F(X)$.

La partie polaire relativement au pôle a est :

$$\frac{A(a)}{B'(a)} \cdot \frac{1}{X-a}$$

Démo :

a étant racine simple de $B(X)$, alors $B(X) = (X-a)\,Q(X)$, où

$Q(a) \neq 0$.

$$\Rightarrow F(X) = \frac{A(X)}{(X-a)\,Q(X)}$$

$$\Rightarrow F(X) = \underbrace{E(X)}_{\text{partie entière}} + \underbrace{\frac{\beta}{X-a}}_{} + \cdots$$

(La décomposition de $F(X)$)

La partie polaire relativement au pôle a.

Multiplions par $(X-a)$, on aura :

$$\frac{A(X)}{Q(X)} = (X-a)\,E(X) + \beta + (X-a) \times \cdots$$

Pour $(X=a)$, on obtient $\beta = \frac{A(a)}{Q(a)}$ $\quad \frac{A(a)}{B'(a)}$?

D'autre part, on a $B(X) = (X-a)\,Q(X)$

$$\Rightarrow B'(X) = Q(X) + (X-a)\,Q'(X)$$

$$\Rightarrow B'(a) = Q(a)$$

$$\Rightarrow \beta = \frac{A(a)}{B'(a)}$$

Ainsi, la partie polaire voulue est : $\boxed{\frac{A(a)}{B'(a)} \cdot \frac{1}{X-a}}$ $\square$

Exercice d'application :

Soit $n \geqslant 2$.

Déterminer la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}$ de chacune des fractions suivantes :

1) $F(X) = \dfrac{1}{X^n - 1}$

2) $G(X) = \dfrac{X^{n-1}}{X^n - 1}$

Solution :

Les pôles de $F(X)$ et $G(X)$ sont les racines $n$èmes de l'unité ; $x_k = e^{\frac{2k\pi i}{n}}$; $1 \leq k \leq n$.

1) $$\frac{1}{X^n-1}=\frac{1}{\prod_{k=1}^{n}(X-x_k)}.$$

La décomposition en éléments simples est :

$$\frac{1}{X^n-1}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\alpha_k}{X-x_k}\ ; \text{ où } \alpha_k\in\mathbb{C}.$$

$(\deg<0 \Rightarrow E(X)=0)$.

Or x_k est un pôle simple de $\frac{1}{X^n-1}$, alors $\alpha_k=\frac{A(x_k)}{B'(x_k)}$

où $A(X)=1$ et $B(X)=X^n-1$.

Ainsi $\alpha_k=\frac{1}{n\,x_k^{n-1}}=\frac{x_k}{n}$ (car $x_k^n=1$).

C/C : $$\frac{1}{X^n-1}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k}{X-x_k}$$

2) Idem, on trouve :

$$\frac{X^{n-1}}{X^n-1}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\alpha_k}{X-x_k}$$ (encore $\deg<0\Rightarrow E(X)=0$)

On trouve que $\alpha_k=\frac{1}{n}$

C/C : $$\frac{X^{n-1}}{X^n-1}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{X-x_k}$$

Exemples de décompositions en éléments simples :

Exemple 1 :

$$F_1(X) = \frac{1}{(X-1)(X-2)} \in \mathbb{R}(X) \text{ . Décomposons } F_1(X).$$

On a $F_1(X) = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X-2}$ $(*)$

1) $a = ?$

Multiplions par $(X-1)$ dans $(*)$, ça donne :

$$\frac{1}{X-2} = a + \frac{b}{X-2} \cdot (X-1)$$

Prenons $X = 1$, on obtient $a = -1$.

2) $b = ?$

On a $F_1(X) = \frac{-1}{X-1} + \frac{b}{X-2}$ $(*)$

Piste 1 pour déterminer b :

On multiplie par $(X-2)$ dans $(*)$ et on obtient :

$$\frac{1}{X-1} = b + \frac{-1}{X-1} \cdot (X-2)$$

puis on donne à $X = 2$, et on obtient $b = 1$.

Piste 2 pour déterminer b :

On a : $$\frac{1}{(X-1)(X-2)} = \frac{-1}{X-1} + \frac{b}{X-2}$$

On donne à X une valeur particulière ; par exemple $X=0$

$$\Longrightarrow b = 1$$

Piste 3 pour déterminer b :

On a : $$\frac{1}{(X-1)(X-2)} = \frac{-1}{X-1} + \frac{b}{X-2}$$

On multiplie par X, on obtient :

$$\frac{X}{(X-1)(X-2)} = \frac{-X}{X-1} + \frac{bX}{X-2}$$

Puis on tend $X \longrightarrow +\infty$, on obtient :

$$-1+b=0$$

$$\Longrightarrow b = 1$$

Exemple 2 :

$$F_2(x) = \frac{1}{(x-1)^2(x-2)}.$$ Décomposons $F_2(x)$.

$$F_2(x) = \frac{1}{(x-1)^2(x-2)} = \left(\frac{a}{x-1} + \frac{b}{(x-1)^2}\right) + \frac{c}{x-2} \qquad (\Sigma)$$

1) $c = ?$

La technique est devenue maintenant classique ; on multiplie par $(x-2)$ dans (Σ), puis on remplace x par 2.

On trouve $c = 1$

2) i) On calcule d'abord b ; c'est plus simple.

On a : $$\frac{1}{(x-1)^2(x-2)} = \left(\frac{a}{x-1} + \frac{b}{(x-1)^2}\right) + \frac{c}{x-2}$$

On multiplie par $(x-1)^2$. Ça donne :

$$\frac{1}{x-2} = a(x-1) + b + \frac{c}{x-2}\cdot(x-1)^2$$

$x = 1 \implies b = -1$

2) ii) $a = ?$

On a : $$\frac{1}{(x-1)^2(x-2)} = \left(\frac{a}{x-1} + \frac{-1}{(x-1)^2}\right) + \frac{1}{x-2}$$

On donne à x une valeur particulière, par exemple

pour $x = 0$, on obtient $a = -1$

C/C : $\dfrac{1}{(X-1)^2(X-2)} = \left(\dfrac{-1}{X-1} - \dfrac{1}{(X-1)^2}\right) + \dfrac{1}{X-2}$

Exemple 3 :

$F_3(x) = \dfrac{1}{X(X-1)^3}$. Décomposons $F_3(x)$.

Solution :

$$F_3(x) = \frac{1}{X(X-1)^3} = \frac{a}{X} + \left(\frac{b}{X-1} + \frac{c}{(X-1)^2} + \frac{d}{(X-1)^3}\right)$$

1) $a = -1$ (facile et classique)

2) $d = 1$ (Plus facile que b et c)

On multiplie par $(X-1)^3$ l'égalité :

$$\frac{1}{X(X-1)^3} = \frac{a}{X} + \left(\frac{b}{X-1} + \frac{c}{(X-1)^2} + \frac{d}{(X-1)^3}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{X} = \frac{a}{X}.(X-1)^3 + b(X-1)^2 + c(X-1) + d$$

et On prend $X=1$, et on trouve $\boxed{d=1}$

3) $C = ?$

On a à présent eu :

$$\frac{1}{X(X-1)^3} = \frac{-1}{X} + \left(\frac{b}{X-1} + \frac{c}{(X-1)^2} + \frac{1}{(X-1)^3}\right)$$

On déplace ce terme ici

$$\Rightarrow \quad \frac{-1}{X(X-1)^2} = \frac{-1}{X} + \left(\frac{b}{X-1} + \frac{c}{(X-1)^2}\right)$$

On détermine c par la même technique classique :

On multiplie par $(X-1)^2$, puis avec $X = 1$, on obtient :

$$c = -1$$

4) $b = ?$

C'est l'unique inconnue qui reste. On a :

$$\frac{-1}{X(X-1)^2} = \frac{-1}{X} + \left(\frac{b}{X-1} - \frac{1}{(X-1)^2}\right)$$

On donne à X une valeur particulière, et on tire b.

Par exemple, $X = 2 \Longrightarrow b = 1$

C/C :

$$\frac{1}{X(X-1)^3} = \frac{-1}{X} + \left(\frac{1}{X-1} - \frac{1}{(X-1)^2} + \frac{1}{(X-1)^3}\right)$$

Exemple 4 :

$F_4(x) = \dfrac{1}{x(x^2+1)}$. Décomposons $F_4(x)$ dans $\mathbb{C}$.

Solution :

$$F_4(x) = \frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{1}{x(x-i)(x+i)}$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x(x-i)(x+i)} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x-i} + \dfrac{c}{x+i} \\ \text{où } a, b, c \in \mathbb{C} \end{cases}$$

1) $a = 1$ (facile)

2) $b = ?$

On multiplie l'égalité suivante par $(x-i)$:

$$\frac{1}{x(x-i)(x+i)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-i} + \frac{c}{x+i}$$

On trouve :

$$\frac{1}{x(x+i)} = \frac{a(x-i)}{x} + b + \frac{c(x-i)}{x+i}$$

et $X = i \Longrightarrow \boxed{b = -\frac{1}{2}}$

3) On trouve de même que $\boxed{c = -\frac{1}{2}}$

Applications des fractions rationnelles

Illustrons ces applications à travers l'exercice suivant :

Exercice à savoir traiter :

1) Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{(t-1)(t-2)}\,dt$

2) Soit $n \geqslant 3$.
Notons $U_n = \displaystyle\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{(k-1)(k-2)}$.

Calculer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} U_n$.

3) Calculer $\left(\dfrac{1}{(t-1)(t-2)}\right)^{(n)}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Solution :

1) Pour le calcul de l'intégrale d'une fonction rationnelle telle que $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{(t-1)(t-2)}\,dt$

Du fait qu'on ne peut pas tirer une primitive facilement, on commence d'abord par la décomposition de la fraction $\dfrac{1}{(X-1)(X-2)}$, puis le problème est presque résolu.

On avait trouvé plus haut que :

$$\frac{1}{(X-1)(X-2)} = \frac{-1}{X-1} + \frac{1}{X-2}$$

D'où :

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{(t-1)(t-2)}\,dt = \int_0^{1/2} \underbrace{\left(\frac{-1}{t-1} + \frac{1}{t-2}\right)}_{\text{facile à lui chercher une primitive.}} dt$$

$$= \Big[-\ln|t-1| + \ln|t-2|\Big]_0^{1/2} = \dots$$

2) Soit $n \geq 3$.

Notons $U_n = \displaystyle\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{(k-1)(k-2)}$.

Calculons $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$.

On commence par simplifier la somme $U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k-1)(k-2)}$.

Le terme à l'intérieur de la somme est sous forme d'une fraction rationnelle.

Là encore, on commence par décomposer celle-ci. Et

C'est presque fini.

On avait $\frac{1}{(X-1)(X-2)} = \frac{-1}{X-1} + \frac{1}{X-2}$

D'où :

$$U_n = \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{(k-1)(k-2)}.$$

$$= \sum_{k=3}^{n}\left(\frac{1}{k-2} - \frac{1}{k-1}\right)$$ (c'est une somme télescopique)

D'où : $\left(\forall n \geq 3,\ U_n = 1 - \frac{1}{n-1}\right)$

$$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} U_n = 1$$

---

3) Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculons $\left(\frac{1}{(t-1)(t-2)}\right)^{(n)}$.

Là encore, on ne sait pas calculer directement cette dérivée nème. Mais vu que c'est une fraction, on commence par la décomposer, et le reste est simple.

On avait $\dfrac{1}{(t-1)(t-2)} = \dfrac{-1}{t-1} + \dfrac{1}{t-2}$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{(t-1)(t-2)}\right)^{(n)} = \left(\frac{-1}{t-1}\right)^{(n)} + \left(\frac{1}{t-2}\right)^{(n)}$$

$$\left(\frac{1}{t-1}\right)^{(n)} = \left((t-1)^{-1}\right)^{(n)}$$

$$= (-1)\times(-2)\times\cdots\times(-n)(t-1)^{-1-n}$$

$$= \frac{(-1)^n n!}{(t-1)^{n+1}}$$

De même $\left(\dfrac{1}{t-2}\right)^{(n)} = \dfrac{(-1)^n n!}{(t-2)^{n+1}}$

D'où enfin :

$$\left(\frac{1}{(t-1)(t-2)}\right)^{(n)} = \left(\frac{-1}{t-1}\right)^{(n)} + \left(\frac{1}{t-2}\right)^{(n)} = (-1)^n n!\left(\frac{-1}{(t-1)^{n+1}} + \frac{1}{(t-2)^{n+1}}\right)$$

3) Décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}$ d'une fraction rationnelle.

Exemples introductifs :

Exemple 1 :

$$F_1(x) = \frac{1}{x(x^2+1)} \in \mathbb{R}(x).$$

$$\begin{cases} x \text{ et } (x^2+1) \text{ sont irréductibles dans } \mathbb{R}. \\ F_1 \text{ sous forme irréductible.} \\ \deg(F_1) < 0. \end{cases}$$

La décomposition de $F_1(x)$ dans $\mathbb{R}$ est de la forme :

$$\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{x^2+1}$$

où $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Exemple 2 :

$$F_2(x) = \frac{1}{x(x^2+1)^2} \in \mathbb{R}(x).$$

$$\begin{cases} x \text{ et } (x^2+1) \text{ sont irréductibles dans } \mathbb{R}. \\ F_2 \text{ sous forme irréductible.} \\ \deg(F_2) < 0. \end{cases}$$

La décomposition de $F_2(x)$ dans $\mathbb{R}$ est de la forme :

$$\frac{1}{x(x^2+1)^2} = \frac{a}{x} + \left(\frac{bx+c}{x^2+1} + \frac{dx+e}{(x^2+1)^2}\right)$$

où $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$.

En général, on a la proposition suivante :

Prop :

Soit $F(x) = \dfrac{A(x)}{\prod_{k=1}^{r}(x-x_k)^{m_k} \cdot \prod_{k=1}^{s}(x^2+b_k x+c_k)^{\mu_k}} \in \mathbb{R}(x)$.

où $F(x)$ sous forme irréductible.

Les x_k réels distincts deux à deux.

Les b_k et c_k réels vérifiants $b_k^2 - 4c_k < 0$.

Les $(x^2+b_k x+c_k)$ distincts deux à deux.

La fraction $F(x)$ s'écrit d'une manière unique sous la forme :

$$F(x) = E(x) + \sum_{k=1}^{r}\left(\sum_{j=1}^{m_k} \frac{a_{jk}}{(x-x_k)^j}\right) + \sum_{k=1}^{s}\left(\sum_{j=1}^{\mu_k} \frac{\alpha_{jk}x+\beta_{jk}}{(x^2+b_k x+c_k)^j}\right)$$

$E(x)$ étant la partie entière de la fraction $F(x)$.

Exemples de décompositions en éléments simples dans $\mathbb{R}$.

Exemple 1 :

$F_1(x) = \dfrac{1}{x(x^2+1)} \in \mathbb{R}(x)$. Décomposons-la dans $\mathbb{R}$.

On a : $F_1(x) = \dfrac{1}{x(x^2+1)} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{bx+c}{x^2+1}$ où $a, b, c \in \mathbb{R}$.

1) $a = 1$ / facile et classique).

On a ainsi : $F_1(x) = \dfrac{1}{x(x^2+1)} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{bx+c}{x^2+1}$ $\circledast$

2) Déterminons b et c.

Piste 1 :

On déplace $\dfrac{1}{x}$ vers l'autre côté de $\circledast$, on obtient :

$$\frac{-x}{x^2+1} = \frac{bx+c}{x^2+1}$$

$\Longrightarrow$ $b = -1$ et $c = 0$

Piste 2 :

On a : $F_1(x) = \dfrac{1}{x(x^2+1)} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{bx+c}{x^2+1}$ $\circledast$

On multiplie dans $\circledast$ par x, puis on tend $(x \to +\infty)$, on obtient :

$$\boxed{\frac{1}{x^2+1} = 1 + \frac{bx^2+cx}{x^2+1}}$$

$1 + b = 0$ et donc $b = -1$

$\circledast$ devient : $\dfrac{1}{x(x^2+1)} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{-x+c}{x^2+1}$

c est l'unique inconnue.

On donne à x une valeur et on tire c.

$x = 1 \Rightarrow c = 0$

Piste 3 :

On a : $F_1(x) = \dfrac{1}{x(x^2+1)} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{bx+c}{x^2+1}$ ⊛

On remarque que F_1 est impaire.

On a $\begin{cases} F_1(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{bx+c}{x^2+1} \\ F_1(-x) = \dfrac{-1}{x} + \dfrac{-bx+c}{x^2+1} \end{cases}$

Avec $F_1(-x) = -F_1(x)$, on tire que :

$$\begin{cases} F_1(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{bx+c}{x^2+1} \\ F_1(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{bx-c}{x^2+1} \end{cases}$$

Et par unicité de la décomposition de $F_1(x)$, on tire que $c = -c$

Soit $c = 0$

⊛ devient : $\dfrac{1}{x(x^2+1)} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{bx}{x^2+1}$

On tire b facilement, comme unique inconnue qui reste.

Par exemple, $x = 1 \Rightarrow b = -1$

Piste 4 :

On a : $F_1(x) = \dfrac{1}{x(x^2+1)} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{bx+c}{x^2+1}$ ⊛

On peut calculer d'un **seul coup** b et c.

On multiplie ⊛ par (x^2+1). On obtient.

$$\frac{1}{x} = \frac{(x^2+1)}{x} + (bx+c)$$

On prend $x=i$ (pour avoir $x^2+1=0$), et on obtient :

$$-i = bi + c \quad ; \text{ où } b \text{ et } c \text{ réels.}$$

$$\Rightarrow b=-1 \text{ et } c=0$$

Exemple 2 :

$F_2(x) = \dfrac{1}{x(x^2+1)^2} \in \mathbb{R}(x)$. Décomposons-la dans $\mathbb{R}$.

Solution : Chez-vous !

Question :

Déterminer les primitives $\displaystyle\int \frac{1}{x(x^2+1)}\,dx$.

Sol :

L'idée est maintenant connue.

On commence par la décomposition de la fraction ; on l'avait déjà faite.

$$\Rightarrow \int \frac{1}{x(x^2+1)}\,dx = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}\right)dx$$

$$= \boxed{\ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C}$$

4°) Décomposition de la fraction $\frac{P'}{P}$, où P polynôme scindé.

Prop :

Soit $P(X) = \lambda \prod_{k=1}^{r} (X - x_k)^{m_k} \in \mathbb{K}[X]$, scindé dans $\mathbb{K}$.

Les x_k étant les racines de $P(X)$, distinctes deux à deux.

m_k la multiplicité de la racine x_k.

On a :

$$\frac{P'(X)}{P(X)} = \sum_{k=1}^{r} \frac{m_k}{X - x_k}$$

Rappel :

$$(P_1 P_2 \cdots P_s)' = P_1' P_2 \cdots P_s + P_1 P_2' \cdots P_s + \cdots + P_1 P_2 \cdots P_s'$$

Démo :

On a
$$\begin{cases} P(X) = \lambda (X - x_1)^{m_1} (X - x_2)^{m_2} \cdots (X - x_r)^{m_r} \\ P'(X) = \lambda \Big[m_1 (X - x_1)^{m_1 - 1} (X - x_2)^{m_2} \cdots (X - x_r)^{m_r} + m_2 (X - x_1)^{m_1} (X - x_2)^{m_2 - 1} \cdots (X - x_r)^{m_r} + \\ \qquad \cdots + m_r (X - x_1)^{m_1} (X - x_2)^{m_2} \cdots (X - x_r)^{m_r - 1} \Big] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{P'(X)}{P(X)} = \frac{m_1}{X - x_1} + \frac{m_2}{X - x_2} + \cdots + \frac{m_r}{X - x_r}} \quad \square$$

Exemple :

Soit $n \geq 2$. Retrouver la décomposition dans $\mathbb{C}$ de la fraction $\dfrac{X^{n-1}}{X^n - 1}$.

Solution :

Posons $P(x) = X^n - 1$. On a $P'(x) = n\,X^{n-1}$

$$\frac{X^{n-1}}{X^n - 1} = \frac{1}{n} \cdot \frac{P'(x)}{P(x)}$$

D'autre part, on a : $P(x) = \prod_{k=1}^{n} (X - x_k)$, où $x_k = e^{\frac{2k\pi i}{n}}$.

Toutes les racines x_k sont simples ($m_k = 1$ donc).

$$(\text{Prop}) \Longrightarrow \frac{P'(x)}{P(x)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{m_k}{X - x_k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{X - x_k}$$

Enfin :

$$\frac{X^{n-1}}{X^n - 1} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{X - x_k}$$

Exercice d'application :

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, scindé dans $\mathbb{R}$, et tel que $\deg(P) \geq 1$.

Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ (P'(x))^2 - P(x)P''(x) \geq 0$$

Solution :

Posons $P(X) = \lambda \prod_{k=1}^{n} (X - x_k)^{m_k}$; où $m_k \geqslant 1$ la multiplicité de la racine x_k.

On a $\dfrac{P'(X)}{P(X)} = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{m_k}{X - x_k}$

$$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{x_1, \ldots, x_n\},\ \frac{P''(x)P(x) - (P'(x))^2}{(P(x))^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{-m_k}{(x - x_k)^2}$$

$$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{x_1, \ldots, x_n\},\ \frac{(P'(x))^2 - P''(x)P(x)}{(P(x))^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{m_k}{(x - x_k)^2} \geqslant 0$$

D'où : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{x_1, \ldots, x_n\},\ (P'(x))^2 - P(x)P''(x) \geqslant 0$

Et si $x \in \{x_1, \ldots, x_n\}$, on a $(P'(x))^2 - \underbrace{P(x)}_{=0} P''(x) = (P'(x))^2 \geqslant 0$

Enfin :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ (P'(x))^2 - P(x)P''(x) \geqslant 0$$

Fin