

Extrait du CNC Marocain pour 1ère Année

Année 2024

Filière MP

Problème

Dans tout le problème $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on désigne par E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension n , $n \geq 1$ et par $\mathcal{L}(E)$ le $\mathbb{K}$ -espace vectoriel des endomorphismes de E . On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$, $GL_n(\mathbb{K})$ le groupe des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et I_n la matrice unité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Pour $f \in \mathcal{L}(E)$, on note $f^0 = \text{id}_E$ et pour tout entier naturel k , $f^{k+1} = f^k \circ f$ où id_E désigne l'application identité de E .

On dit que f est un endomorphisme nilpotent s'il existe un entier naturel non nul p tel que $f^p = 0$, le plus petit entier naturel non nul p vérifiant cette propriété est appelé indice de nilpotence de f .

Partie 1: Noyaux itérés

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, on note pour tout entier naturel k , $\mathcal{N}_k = \text{Ker}(f^k)$ et $\mathcal{I}_k = \text{Im}(f^k)$.

1. Montrer que la suite $(\mathcal{N}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est croissante et que la suite $(\mathcal{I}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est décroissante pour l'inclusion.
2. En déduire que $(\dim \mathcal{N}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante d'entiers naturels.
3. Justifier l'existence d'un plus petit entier naturel q tel que $\mathcal{N}_q = \mathcal{N}_{q+1}$.
4. Montrer que $\mathcal{I}_q = \mathcal{I}_{q+1}$.
5. Montrer que $\mathcal{N}_q \oplus \mathcal{I}_q = E$,
6. On considère pour tout entier naturel k , φ_k la restriction de f à $\mathcal{I}_k$.
 - a) Montrer que $\dim \mathcal{I}_k - \dim \mathcal{I}_{k+1} = \dim(\text{Ker}(f) \cap \mathcal{I}_k)$.
 - b) En déduire que la suite $(\dim \mathcal{N}_{k+1} - \dim \mathcal{N}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

Partie 2 : Les endomorphismes nilpotents de rang $n - 1$

Soit U une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, de rang $n - 1$. On note u l'endomorphisme de E canoniquement associé à U . ($E = \mathbb{C}^n$)

1. Soient r et s deux entiers naturels et v la restriction de u^s à $\text{Im}(u^r)$.
 - a) Vérifier que $\text{Im}(v) = \text{Im}(u^{s+r})$.

- b) Montrer que $\text{Ker}(v) \subset \text{Ker}(u^s)$.
 - c) Montrer que $\dim(\text{Ker}(u^{r+s})) \leq \dim(\text{Ker}(u^r)) + \dim(\text{Ker}(u^s))$.
 - d) En déduire que pour tout entier naturel i , $\dim(\text{Ker}(u^i)) \leq i$.
2. On suppose de plus que $U^n = 0$.
- a) Montrer que pour tout entier i tel que $1 \leq i \leq n$, $\dim(\text{Ker}(u^i)) = i$.
 - b) Montrer que l'indice de nilpotence de u est égal à n .
 - c) En déduire qu'il existe un vecteur e de E tel que $\mathcal{B}_e = (e, u(e), \dots, u^{n-1}(e))$ soit une base de E .
 - d) Ecrire la matrice de u dans la base $\mathcal{B}_e$.
3. Montrer que deux matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de rang $n - 1$ sont semblables.

Partie 3: Cycles

Dans cette partie, on prend $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. On dit qu'un endomorphisme f de E est cyclique d'ordre un entier naturel non nul p s'il existe x_0 de E vérifiant les conditions :

- $f^p(x_0) = x_0$.
- $(x_0, f(x_0), \dots, f^{p-1}(x_0))$ est une famille génératrice de E dont les éléments sont distincts deux à deux.

On dit alors que la famille $(x_0, f(x_0), \dots, f^{p-1}(x_0))$ est un p -cycle de f .

- 1. Soit $(x_0, f(x_0), \dots, f^{p-1}(x_0))$ un p -cycle de f .
 - a) Montrer que $f^p = \text{id}_E$.
 - b) Montrer que l'ensemble $F_{x_0} = \{k \in \mathbb{N}^* \mid (x_0, f(x_0), \dots, f^{k-1}(x_0)) \text{ est une famille libre}\}$ admet un maximum noté γ .
 - c) i) Montrer que pour tout entier k tel que $k \geq \gamma$, $f^k(x_0) \in \text{Vect}(x_0, f(x_0), \dots, f^{\gamma-1}(x_0))$.
 ii) Montrer que $\gamma = n$.
- 2. Soit $\mathcal{B}_{x_0} = (x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ un n -cycle de f .
 - a) Justifier que $\mathcal{B}_{x_0}$ est une base de E .
 - b) Déterminer la matrice G de l'endomorphisme f dans la base $\mathcal{B}_{x_0}$.
- 3. Soit $M = (m_{k,l})_{1 \leq k,l \leq n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, telle que $m_{k,l} = \overline{\omega}^{kl}$. On note $\overline{M} = (\overline{m}_{k,l})_{1 \leq k,l \leq n}$, où $\overline{m}_{k,l}$ est le conjugué de $m_{k,l}$.
 - a) Calculer $M \overline{M}$.
 - b) En déduire que $M \in GL_n(\mathbb{C})$ et calculer M^{-1} .

Fin Extrait