(Topologie 3)

Ex 1 : 1) D linéaire.

$\forall U \in E$, $\|D(U)\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |(D(U))_n| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |U_{n+1}| = \sup_{n\in\mathbb{N}^*} |U_n| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} |U_n| = \|U\|_\infty$

D'où D Continue sur E

2) L linéaire.

$\forall n\in\mathbb{N}$, $|(L(U))_n| = |U_{n+1} - U_n| \leq \underbrace{|U_{n+1}|}_{\leq \|U\|_\infty} + \underbrace{|U_n|}_{\leq \|U\|_\infty} \leq 2\|U\|_\infty$

D'où $\sup_{n\in\mathbb{N}} |(L(U))_n| = \|L(U)\|_\infty \leq 2\|U\|_\infty$

$\Rightarrow$ L Continue sur E

Ex 2 :

1) i) $N_2$ norme : OK

ii) $f(a,U)$ existe, ça veut dire que la série $\sum_n a_n U_n$ converge.

Et on a : $(\forall n\in\mathbb{N}, \ |a_n U_n| \leq \|a\|_\infty . |U_n|)$

or $\sum_n |U_n|$ converge alors $\sum_n |a_n U_n|$ CV, donc $\sum a_n U_n$ CV

2) Notons $\phi(a) = f(a,U)$ pour tout $a \in E$.

On a : $\left(\forall a \in E, \ \phi(a) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n U_n\right)$, $\phi$ est clairement forme linéaire sur E.

D'autre part, $\left(\forall a \in E, \ |\phi(a)| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{|a_n|}_{\leq N_1(a)} . |U_n| \leq N_1(a) . \left(\sum_{n=0}^{+\infty} |U_n|\right)\right)$

d'où $\phi$ est continue sur E

3) Posons $\psi(U) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n U_n$, pour tout $U \in F$. $\psi \in \mathcal{L}(F,\mathbb{R})$ (clair)

Et on a : $\forall U \in F, \ |\psi(U)| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{|a_n|}_{\leq N_1(a)} . |U_n| \leq N_1(a) . \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} |U_n|}_{= N_2(U)}$

D'où $\psi$ est Continue sur F

Ex 3 : 1) i) $T \in \mathcal{L}(E,F)$, en effet :

Soient $f, g \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. M.q. $T(\lambda f + g) = \lambda T(f) + T(g)$

C.à.d que : $\left(\forall x \in [0,1], \ \left(T(\lambda f + g)\right)(x) = \lambda T(f)(x) + T(g)(x)\right)$

Et on a : $T(\lambda f + g)(x) \overset{\text{def}}{=} \int_0^x (\lambda f(t) + g(t))\,dt = \lambda \underbrace{\int_0^x f(t)\,dt}_{T(f)(x)} + \underbrace{\int_0^x g(t)\,dt}_{T(g)(x)}$

ii) $T$ est continue sur $E$ ; En effet :

Soit $f \in E$, on a : $N_3(T(f)) = \|T(f)\|_\infty + \|\underbrace{(T(f))'}_{=\|f\|_\infty}\|_\infty$

$\cdot \|T(f)\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |T(f)(x)|$ .

$\forall x \in [0,1]$, on a $|T(f)(x)| = \left|\int_0^x f(t)\,dt\right| \leq \int_0^x \underbrace{|f(t)|}_{\leq \|f\|_\infty} dt \leq \int_0^x \|f\|_\infty dt \leq \overbrace{\int_0^1 \|f\|_\infty dt}^{=\|f\|_\infty}$

D'où $\|T(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty$ et donc : $\left(\forall f \in E,\ N_3(T(f)) \leq 2\underbrace{\|f\|_\infty}_{N_1(f)}\right)$

$T$ étant linéaire, elle est donc continue sur $E$

---

2) Notons $\phi(f) = \int_0^1 f(t)g(t)\,dt$, pour tout $f \in E$.

$\phi$ est clairement forme linéaire sur $E$.

Pour tout $f \in E$, on a :

$$|\phi(f)| = \left|\int_0^1 f(t)g(t)\,dt\right| \underset{\text{Inég Cauchy Schw}}{\leq} \underbrace{\sqrt{\int_0^1 f^2(t)\,dt}}_{N_2(f)} \cdot \underbrace{\sqrt{\int_0^1 g^2(t)\,dt}}_{N_2(g)}$$

$\Rightarrow \left(\forall f \in E,\ |\phi(f)| \leq N_2(g) \cdot N_2(f)\right)$

D'où $\phi$ est continue sur $E$ pour la norme $N_2$.

---

(Ex 4) 1) Notons $A$ l'ensemble des matrices nilpotentes de $M_n(\mathbb{R})$,

Montrons que $A$ est étoilée.

La matrice nulle $O \in A$.

Pour tout $N \in A$, on a $[O, N] \subset A$ ; en effet :

Soit $t \in [0,1]$, $t.O + (1-t)N = (1-t)N$ qui est une matrice nilpotente. $[((1-t)N)^k = (1-t)^k N^k \ldots]$

Ainsi, $A$ est étoilée, donc connexe par arcs.

2) $SO_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} / \theta \in \mathbb{R} \right\} = \{\phi(\theta) \mid \theta \in \mathbb{R}\} = \phi(\mathbb{R})$

où $\phi : \mathbb{R} \to M_2(\mathbb{R})$ ; $\phi(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

$\phi$ est bien continue sur $\mathbb{R}$, car ses composantes le sont.

et $\mathbb{R}$ est connexe par arcs, alors $\phi(\mathbb{R}) = SO_2(\mathbb{R})$ est connexe par arcs.

3) Notons $S = \{x \in E / \|x\| = 1\}$, où $E$ evn de dim $n \geq 2$.

Soient $a$ et $b \in S$.

Le chemin $t \mapsto ta + (1-t)b$ joint $a$ et $b$ et est continue. Mais il n'est pas contenu dans la sphère. Alors on pensera à diviser par $\|ta + (1-t)b\|$. Seulement ça doit être non nul pour tout $t \in [0,1]$.

On a $ta + (1-t)b = 0 \Rightarrow ta = -(1-t)b$

$$\Rightarrow |t| . \underbrace{\|a\|}_{=1} = (1-t) \underbrace{\|b\|}_{=1}$$

$$\Rightarrow t = 1 - t \text{ ; c-à-d } t = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} a + \frac{1}{2} b = 0$$

$$\Rightarrow a = -b$$

Ainsi ; $\left( \text{Si } a \neq -b \text{ Alors } (\forall t \in [0,1],\ ta + (1-t)b \neq 0) \right)$

Cas 1 : (Si $a \neq -b$)

L'application $\phi : [0,1] \longrightarrow E$ ; $t \longmapsto \dfrac{1}{\|ta + (1-t)b\|} . (ta + (1-t)b)$

est bien un chemin continue, inscrit dans $S$ et joignant a et b ($\phi(0) = b$ ; $\phi(1) = a$)

Cas 2 : (Si $a = -b$)

On prend un point $c$ de $S$ différent de $a$ et $(-a) = b$.

On a $c \neq -a \xRightarrow{\text{Cas 1}}$ ($c$ et $a$ sont joignables par un chemin continu inscrit dans $S$)

et on a $c \neq a \Rightarrow c \neq -b$ $(a = -b)$

$\xRightarrow{\text{Cas 1}}$ ($c$ et $b$ sont joignables par un chemin continue inscrit dans $S$)

D'où (a et b sont joignables par un chemin continu inscrit dans $S$)

4) Notons $\Delta_n$ l'ensemble des matrices diagonalisables de $M_n(\mathbb{R})$.
Montrer que $\Delta_n$ est connexe par arcs :

Piste 1 :

Soit $A \in \Delta_n$, $A$ est joignable à $I_n \in \Delta_n$ par le chemin continue : $\phi : [0,1] \longrightarrow M_n(\mathbb{R})$
$t \longmapsto tA+(1-t)I_n$
, qui est inscrit dans $\Delta_n$ (car $tA+(1-t)I_n$ est diagonalisable)

D'où $\Delta_n$ est connexe par arcs

Piste 2 ; plus simple :

$\forall A \in \Delta_n$, $[A,0] \subset \Delta_n$ (car $\forall t \in [0,1], tA+(1-t)0 = tA \in \Delta_n$)

D'où $\Delta_n$ est étoilée en $0$, donc $\Delta_n$ est connexe par arcs

NB : $\Delta_n$ est aussi étoilée en $I_n$

Fin