

# CONCOURS COMMUN 2003

## DES ÉCOLES DES MINES D'ALBI, ALÈS, DOUAI, NANTES

---

### Épreuve de Mathématiques

(toutes filières)

Mecredi 21 mai 2003 de 14h00 à 18h00

## EXTRAIT

### Problème 2

#### Partie I

Notons  $E$  le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des applications de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$  et  $\mathbf{D} : f \in E \mapsto f'$ . Il est clair que  $\mathbf{D}$  est un endomorphisme de  $E$ .

1. – Déterminez le noyau et l'image de  $\mathbf{D}$ .

Soient  $f_1 : t \in \mathbb{R} \mapsto e^t$ ,  $f_2 : t \in \mathbb{R} \mapsto e^{-t/2} \sin\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right)$  et  $f_3 : t \in \mathbb{R} \mapsto e^{-t/2} \cos\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right)$ . Nous noterons  $\mathcal{B} = (f_1, f_2, f_3)$  et  $G$  le sous-espace vectoriel de  $E$  engendré par  $\mathcal{B}$ .

Nous allons montrer que  $\mathcal{B}$  est une famille libre de vecteurs de  $E$ . Soient  $a, b$  et  $c$  des réels tels que  $af_1 + bf_2 + cf_3$  soit la fonction nulle.

2. – L'étudiante Antoinette observe que  $af_1(t) + bf_2(t) + cf_3(t) = 0$  pour tout réel  $t$ . Elle choisit (adroitement) trois valeurs de  $t$ , obtient un système de trois équations aux trois inconnues  $a, b$  et  $c$ , qu'elle résout ; il ne lui reste plus qu'à conclure. Faites comme elle !
3. – L'étudiante Lucie propose d'exploiter le développement limité à l'ordre 2 de la fonction  $af_1 + bf_2 + cf_3$  au voisinage de 0. Faites comme elle !
4. – L'étudiante Nicole décide de s'intéresser au comportement de  $af_1(t) + bf_2(t) + cf_3(t)$  lorsque  $t$  tend vers  $+\infty$ . Faites comme elle !

La famille  $\mathcal{B}$  est donc une base de  $G$ , et ce sous-espace est de dimension 3.

5. – Montrez que  $G$  est stable par  $\mathbf{D}$ .

Nous noterons  $\widehat{\mathbf{D}}$  l'endomorphisme de  $G$  induit par  $\mathbf{D}$ .

6. – Déterminez la matrice  $M$  de  $\widehat{\mathbf{D}}$  dans la base  $\mathcal{B}$ .

7. – Calculez  $M^3$ .
8. – Montrez que  $M$  est inversible, et explicitez son inverse  $M^{-1}$ .
9. – Montrez que  $\widehat{\mathbf{D}}$  est un automorphisme de  $G$ .
10. – Exprimez  $(\widehat{\mathbf{D}})^{-1}$  en fonction de  $\widehat{\mathbf{D}}$ .

## Partie II

Soient  $g$  et  $h$  deux éléments de  $G$ . Définissons  $\varphi(g, h) = g(0)h(0) + g'(0)h'(0) + g''(0)h''(0)$ .

11. – Dressez un tableau à trois lignes et quatre colonnes ; pour  $1 \leq i \leq 3$ , la ligne  $i$  présentera les valeurs de  $i$ ,  $f_i(0)$ ,  $f'_i(0)$  et  $f''_i(0)$  dans cet ordre. Vous ne ferez pas apparaître le détail des calculs sur votre copie.
12. – Montrez que  $\varphi$  est un produit scalaire sur  $G$ .
13. – La base  $\mathcal{B}$  est-elle orthogonale ?
14. – La base  $\mathcal{B}$  est-elle orthonormée ?

## Partie III

Nous nous intéressons dans cette partie à l'équation différentielle  $y''' = y$ , que nous noterons  $(\mathcal{E})$ . Une solution sur  $\mathbb{R}$  de  $(\mathcal{E})$  est une fonction  $f$  définie et trois fois dérivable sur  $\mathbb{R}$ , vérifiant  $f'''(t) = f(t)$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ .

15. – Montrez que toute solution  $f$  de  $(\mathcal{E})$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$ .
16. – Montrez que la fonction nulle est la seule solution polynomiale de  $(\mathcal{E})$ .

Notons  $\mathbf{T} = \mathbf{D}^3 - \mathbf{Id}$ , où  $\mathbf{Id}$  est l'identité de  $E$ , et  $\mathbf{D}^3 = \mathbf{D} \circ \mathbf{D} \circ \mathbf{D}$ . Le noyau de  $\mathbf{T}$  est donc l'ensemble des solutions de  $(\mathcal{E})$ .

17. – Montrez que  $G$  est contenu dans le noyau de  $\mathbf{T}$ .

Nous allons établir l'inclusion inverse ; ainsi,  $G$  sera exactement l'ensemble des solutions de  $(\mathcal{E})$ . Soit  $f$  une solution de  $(\mathcal{E})$  ; nous noterons  $g = f'' + f' + f$ .

18. – Montrez que  $g$  est solution de l'équation différentielle  $y' = y$ .
19. – Décrivez rapidement l'ensemble des solutions de l'équation différentielle  $y' - y = 0$ .
20. – Résolvez l'équation différentielle  $y'' + y' + y = 0$  ; vous donnerez une base de l'ensemble des solutions.
21. – Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Décrivez l'ensemble des solutions de l'équation différentielle  $y'' + y' + y = \lambda e^t$ .
22. – Et maintenant, concluez !

# FIN



