A 2015 MATH. II MP

ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
SUPAÉRO (ISAE), ENSTA PARISTECH,
TÉLÉCOM PARISTECH, MINES PARISTECH,
MINES DE SAINT-ÉTIENNE, MINES DE NANCY,
TÉLÉCOM BRETAGNE, ENSAE PARISTECH (FILIÈRE MP),
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (FILIÈRE TSI).

CONCOURS 2015

SECONDE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Filière MP

MATHÉMATIQUES II - MP.

Extrait

B. Variables aléatoires sous-gaussiennes

Dans toute la suite du problème, toutes les variables aléatoires considérées sont réelles et discrètes, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. Soit $\alpha > 0$. On dit que la variable aléatoire X est α*-sous-gaussienne* si :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \mathsf{E}\big(\exp(tX)\big) \leqslant \exp\left(\frac{\alpha^2 t^2}{2}\right).$$

On rappelle la notation : $\mathrm{ch}(t) = \dfrac{\exp(t) + \exp(-t)}{2}$.

8) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $\mathrm{ch}(t) \leqslant \exp\left(\frac{t^2}{2}\right)$. On pourra au préalable établir le développement de la fonction ch en série entière sur $\mathbb{R}$.

9) Soit $t \in \mathbb{R}$. Démontrer que si $x \in [-1, 1]$, on a l'inégalité de convexité :

$$\exp(tx) \leqslant \frac{1+x}{2}\exp(t) + \frac{1-x}{2}\exp(-t).$$

10) Soit X une variable aléatoire réelle bornée par 1 et centrée. Montrer que X est 1-sous-gaussienne. En déduire que, si X est une variable aléatoire bornée par $\alpha > 0$ et centrée, alors elle est α-sous-gaussienne.

11) Soit $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes et α-sous-gaussiennes, et $\mu_1, \ldots, \mu_n$ des nombres réels tels que $\sum_{i=1}^n (\mu_i)^2 = 1$.

Montrer que la variable aléatoire $\displaystyle\sum_{i=1}^n \mu_i X_i$ est α-sous-gaussienne.

12) Soit X une variable aléatoire α-sous-gaussienne et $\lambda > 0$. Montrer que pour tout $t > 0$:

$$P(X \geqslant \lambda) \leqslant \exp\left(\frac{\alpha^2 t^2}{2} - t\lambda\right)$$

En déduire que :

$$P(|X| \geqslant \lambda) \leqslant 2\exp\left(-\frac{\lambda^2}{2\alpha^2}\right).$$

Dans la suite du problème, on admet qu'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ est d'espérance finie si et seulement si la série $\sum P(X \geqslant k)$ converge et que, dans ce cas :

$$\mathsf{E}(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X \geqslant k).$$

13) Si X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, montrer que X est d'espérance finie si et seulement si la série de terme général $P(X \geqslant k)$ converge et que, dans ce cas :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} P(X \geqslant k) \leqslant \mathsf{E}(X) \leqslant 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} P(X \geqslant k).$$

On pourra pour cela considérer la partie entière $\lfloor X \rfloor$.

Pour tout $s \in]1, +\infty[$, on note $\zeta(s) = \sum_{k=1}^{+\infty} k^{-s}$.

14) Soit X une variable aléatoire α-sous-gaussienne et $\beta > 0$. Montrer que pout tout entier $k > 0$:

$$P\left(\exp\left(\frac{\beta^2 X^2}{2}\right) \geqslant k\right) \leqslant 2k^{-\eta}$$

où on a posé $\eta = \alpha^{-2}\beta^{-2}$. En déduire que si $\alpha\beta < 1$, la variable aléatoire $\exp\left(\frac{\beta^2 X^2}{2}\right)$ est d'espérance finie majorée par $1 + 2\zeta(\eta)$.

Fin extrait

B. Variables aléatoires sous-gaussiennes

Dans toute la suite du problème, toutes les variables aléatoires considérées sont réelles et discrètes, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. Soit $\alpha > 0$. On dit que la variable aléatoire X est α-*sous-gaussienne* si :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \mathrm{E}\left(\exp(tX)\right) \leqslant \exp\left(\frac{\alpha^2 t^2}{2}\right).$$

On rappelle la notation : $\mathrm{ch}(t) = \dfrac{\exp(t) + \exp(-t)}{2}$.

8) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $\mathrm{ch}(t) \leqslant \exp\left(\frac{t^2}{2}\right)$. On pourra au préalable établir le développement de la fonction ch en série entière sur $\mathbb{R}$.

Soit $t \in \mathbb{R}$.

On a : $\begin{cases} \mathrm{ch}(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!} \\ e^{\frac{t^2}{2}} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(t^2/2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{2^n \cdot (n!)} \end{cases}$

Alors il suffit de montrer que :

$$\left(\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{(2n)!} \leqslant \frac{1}{2^n \cdot n!}\right)$$

Càd $\left(\forall n \in \mathbb{N}, \quad (2n)! \geqslant 2^n \cdot n!\right)$

Soit $n \geqslant 1$, on a :

$(2n) - (n+1) + 1$

$$(2n)! = \underbrace{(2n)}_{\geqslant 2} \cdots \underbrace{(n+1)}_{\geqslant 2} \cdot n! \geqslant 2^{n} \times n! = 2^n . n!$$

Et cette inégalité est vérifiée pour $n=0$.

D'où $\left(\forall n \in \mathbb{N}, \quad (2n)! \geqslant 2^n \cdot n!\right)$

$\square$

9) Soit $t \in \mathbb{R}$. Démontrer que si $x \in [-1,1]$, on a l'inégalité de convexité :

$$\exp(tx) \leqslant \frac{1+x}{2}\exp(t) + \frac{1-x}{2}\exp(-t).$$

On a $\exp(tx) = \exp\left(\frac{1+x}{2} \cdot t + \frac{1-x}{2} \cdot (-t)\right)$

Or $\begin{cases} \exp \text{ est convexe sur } \mathbb{R}. \\ \frac{1+x}{2} \text{ et } \frac{1-x}{2} \text{ positifs de somme égale à } 1. \end{cases}$

Alors $\exp\left(\frac{1+x}{2} \cdot t + \frac{1-x}{2} \cdot (-t)\right) \leqslant \frac{1+x}{2}\exp(t) + \frac{1-x}{2}\exp(-t)$

D'où l'inégalité voulue.

10) Soit X une variable aléatoire réelle bornée par 1 et centrée. Montrer que X est 1-sous-gaussienne. En déduire que, si X est une variable aléatoire bornée par $\alpha > 0$ et centrée, alors elle est α-sous-gaussienne.

a) Supposons que $|X| \leqslant 1$ et $E(X) = 0$.

M.q. X est 1-sous-gaussienne :

Càd : $\left(\forall t \in \mathbb{R},\ E(\exp(tX)) \leqslant \exp\left(\frac{t^2}{2}\right)\right)$

. Soit $\alpha > 0$. On dit que la variable aléatoire X est α-*sous-gaussienne* si :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \mathrm{E}(\exp(tX)) \leqslant \exp\left(\frac{\alpha^2 t^2}{2}\right).$$

Définition

Soit $t \in \mathbb{R}$. On a $X \in [-1,1]$, alors d'après (9°) :

$$\exp(tX) \leqslant \frac{1+X}{2} \cdot \exp(t) + \frac{1-X}{2} \cdot \exp(-t)$$

Et vu la croissance et la linéarité de l'espérance, on a :

$$E(\exp(tX)) \leqslant \exp(t)\, \underbrace{E\left(\frac{1+X}{2}\right)}_{= \frac{1}{2},\ \text{car } E(X)=0} + \exp(-t)\, \underbrace{E\left(\frac{1-X}{2}\right)}_{= \frac{1}{2}}$$

D'où $E(\exp(tX)) \leqslant ch(t)$

$\leqslant \exp\left(\frac{t^2}{2}\right)$ (d'après 8°))

b) En déduire que, si X est une variable aléatoire bornée par $\alpha > 0$ et centrée, alors elle est α-sous-gaussienne.

Supposons que $|X| \leqslant \alpha$ et $E(X)=0$.

Mq que X est α-sous-gaussienne.

Soit alors $t \in \mathbb{R}$. Mq que $E(\exp(tX)) \leqslant \exp\left(\frac{\alpha^2 t^2}{2}\right)$:

On a $\begin{cases} \left|\frac{X}{\alpha}\right| \leqslant 1 \\ E\left(\frac{X}{\alpha}\right)=0 \end{cases}$ alors d'après a) on a :

$\forall s \in \mathbb{R}, \; E\left(\exp\left(s \cdot \frac{X}{\alpha}\right)\right) \leqslant \exp\left(\frac{s^2}{2}\right) \quad (\Omega)$

Alors $E(\exp(tX)) = E\left(\exp\left(t\alpha \cdot \frac{X}{\alpha}\right)\right) \overset{(\Omega)}{\leqslant} \exp\left(\frac{(t\alpha)^2}{2}\right)$

$\square$

11) Soit $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes et α-sous-gaussiennes, et $\mu_1, \dots, \mu_n$ des nombres réels tels que $\sum_{i=1}^{n} (\mu_i)^2 = 1$.

Montrer que la variable aléatoire $\sum_{i=1}^{n} \mu_i X_i$ est α-sous-gaussienne.

Soit $t \in \mathbb{R}$. M.q. :
$$E\left(\exp\left(t \cdot \sum_{i=1}^{n} \mu_i X_i\right)\right) \leq \exp\left(\frac{\alpha^2 t^2}{2}\right)$$

On a :
$$E\left(\exp\left(t \cdot \sum_{i=1}^{n} \mu_i X_i\right)\right) = E\left(\exp\left(\sum_{i=1}^{n} t \mu_i X_i\right)\right)$$
$$= E\left(\prod_{i=1}^{n} \exp(t \mu_i X_i)\right)$$
$$= \prod_{i=1}^{n} E\left(\exp(t \mu_i X_i)\right)$$

Car les $\left(\exp(t \mu_i X_i)\right)_{1 \leq i \leq n}$ sont indépendantes vu que les $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont indépendantes.

Or : $\left(\forall 1 \leq i \leq n,\ E\left(\exp(t \mu_i X_i)\right) \leq \exp\left(\frac{t^2 \mu_i^2 \alpha^2}{2}\right)\right)$

Car X_i est α-sous-gaussienne.

Alors :
$$E\left(\exp\left(t \cdot \sum_{i=1}^{n} \mu_i X_i\right)\right) \leq \prod_{i=1}^{n} \exp\left(\frac{t^2 \mu_i^2 \alpha^2}{2}\right)$$
$$= \exp\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{t^2 \mu_i^2 \alpha^2}{2}\right)$$
$$= \exp\left(\frac{t^2 \alpha^2}{2} \cdot \overbrace{\sum_{i=1}^{n} \mu_i^2}^{=1}\right) = \exp\left(\frac{t^2 \alpha^2}{2}\right)$$

$\square$

12) Soit X une variable aléatoire α-sous-gaussienne et $\lambda > 0$. Montrer que pour tout $t > 0$:

$$P(X \geqslant \lambda) \leqslant \exp\left(\frac{\alpha^2 t^2}{2} - t\lambda\right)$$

En déduire que :

$$P(|X| \geqslant \lambda) \leqslant 2\exp\left(-\frac{\lambda^2}{2\alpha^2}\right).$$

a) Soient X var α-sous-gaussienne et $\lambda > 0$:

Soit $t > 0$. M que : $\mathbb{P}(X \geqslant \lambda) \leqslant \exp\left(\frac{\alpha^2 t^2}{2} - t\lambda\right)$

On sent l'inégalité de Markov :

Rappel : Si $\begin{pmatrix} X \geqslant 0 \\ a > 0 \end{pmatrix}$ Alors $\boxed{\mathbb{P}(X \geqslant a) \leqslant \frac{E(X)}{a}}$

On a :

$$\mathbb{P}(X \geqslant \lambda) = P(tX \geqslant t\lambda) = P(\overbrace{\exp(tX)}^{\text{positive}} \geqslant \exp(t\lambda))$$

$$\leqslant \frac{E(\exp(tX))}{\exp(t\lambda)} \quad \text{(Markov)}$$

$$\leqslant \frac{\exp\left(\frac{\alpha^2 t^2}{2}\right)}{\exp(t\lambda)} \quad \left(\text{car } X\ \alpha\text{-sous-gaussienne}\right)$$

$$= \exp\left(\frac{\alpha^2 t^2}{2} - t\lambda\right)$$

$\square$

b) En déduire que :

$$P(|X| \geqslant \lambda) \leqslant 2\exp\left(-\frac{\lambda^2}{2\alpha^2}\right).$$

On a $(|X| \geqslant \lambda) = (X \geqslant \lambda) \sqcup (-X \geqslant \lambda)$

$\Rightarrow P(|X| \geqslant \lambda) = P(X \geqslant \lambda) + P(-X \geqslant \lambda)$

On a $P(X \geqslant \lambda) \leqslant \exp\left(\frac{\alpha^2 t^2}{2} - t\lambda\right)$ (d'après a)

D'autre part, $(-X)$ est aussi α-sous-gaussienne.

Car :

$\forall t \in \mathbb{R}$, $E(\exp(t.(-X))) = E(\exp((-t).X))$

$$\leq \exp\left(\frac{\alpha^2.(-t)^2}{2}\right) \quad (\text{car } X\text{-}\alpha\text{-s-gauss})$$

$$= \exp\left(\frac{\alpha^2 t^2}{2}\right)$$

D'où d'après a), on a :

$$\mathbb{P}(-X \geq \lambda) \leq \exp\left(\frac{\alpha^2 t^2}{2} - t\lambda\right)$$

Ainsi :

$$\forall t > 0, \quad P(|X| \geq \lambda) \leq 2\exp\left(\frac{\alpha^2 t^2}{2} - t\lambda\right)$$

et nous voulons montrer que : $P(|X| \geq \lambda) \leq 2\exp\left(-\frac{\lambda^2}{2\alpha^2}\right)$

Alors pour finir, il suffit de vérifier qu'il existe

$t > 0$ tel que $\left(\frac{\alpha^2 t^2}{2} - t\lambda = \frac{-\lambda^2}{2\alpha^2}\right)$

Et on a :

$$\frac{\alpha^2 t^2}{2} - t\lambda = \frac{-\lambda^2}{2\alpha^2} \iff \alpha^2 t^2 - 2t\lambda + \frac{\lambda^2}{\alpha^2} = 0$$

$$\iff (\alpha t)^2 - 2.\alpha t.\frac{\lambda}{\alpha} + \left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)^2 = 0$$

$$\iff \left(\alpha t - \frac{\lambda}{\alpha}\right)^2 = 0$$

$$\iff t = \frac{\lambda}{\alpha^2}$$

Un tel $t > 0$ existe alors, et c'est fini $\square$

Dans la suite du problème, on admet qu'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ est d'espérance finie si et seulement si la série $\sum P(X \geqslant k)$ converge et que, dans ce cas :

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X \geqslant k).$$

13) Si X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, montrer que X est d'espérance finie si et seulement si la série de terme général $P(X \geqslant k)$ converge et que, dans ce cas :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} P(X \geqslant k) \leqslant \mathrm{E}(X) \leqslant 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} P(X \geqslant k).$$

On pourra pour cela considérer la partie entière $\lfloor X \rfloor$.

a) Soit $X \geqslant 0$. Mq que :

$\left(X \text{ admet une espérance finie}\right) \Leftrightarrow \left(\sum_k P(X \geqslant k) \text{ Converge}\right)$

On a : $\lfloor X \rfloor \leqslant X < \lfloor X \rfloor + 1$

D'où

$\left(X \text{ admet une espérance finie}\right) \Leftrightarrow \left(\lfloor X \rfloor \text{ admet une espérance finie}\right)$

Car $\lfloor X \rfloor$, X et $(\lfloor X \rfloor + 1)$ sont positives.

Ainsi :

$\left(X \text{ admet une espérance finie}\right) \Leftrightarrow \left(\lfloor X \rfloor \text{ admet une espérance finie}\right)$

$\Leftrightarrow \sum_k P(\lfloor X \rfloor \geqslant k) \text{ Converge}$ (Car $\lfloor X \rfloor$ à valeurs dans $\mathbb{N}$)

D'autre part : $(X \geqslant k) = (\lfloor X \rfloor \geqslant k)$

D'où :

$\left(X \text{ admet une espérance finie}\right) \Leftrightarrow \left(\sum_k P(X \geqslant k) \text{ Converge}\right)$

$\square$

b) Supposons maintenant que X admet une espérance finie, et montrons qu'on a :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} P(X \geq k) \leq \mathrm{E}(X) \leq 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} P(X \geq k).$$

On a $\lfloor X \rfloor \leq X \leq \lfloor X \rfloor + 1$

$\Rightarrow \begin{cases} E(\lfloor X \rfloor) \leq E(X) \leq E(\lfloor X \rfloor) + 1 \\ \text{Car l'espérance est croissante} \end{cases}$

Or $\begin{cases} E(\lfloor X \rfloor) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(\lfloor X \rfloor \geq k) \\ \text{car } \lfloor X \rfloor \text{ à valeurs dans } \mathbb{N} \end{cases}$

Alors $\sum_{k=1}^{+\infty} P(\lfloor X \rfloor \geq k) \leq E(X) \leq 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} P(\lfloor X \rfloor \geq k)$

et vu que $(\lfloor X \rfloor \geq k) = (X \geq k)$

Alors

$$\sum_{k=1}^{+\infty} P(X \geq k) \leq \mathrm{E}(X) \leq 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} P(X \geq k).$$

$\square$

Pour tout $s \in]1, +\infty[$, on note $\zeta(s) = \sum_{k=1}^{+\infty} k^{-s}$.

14) Soit X une variable aléatoire α-sous-gaussienne et $\beta > 0$. Montrer que pout tout entier $k > 0$:

$$P\left(\exp\left(\frac{\beta^2 X^2}{2}\right) \geqslant k\right) \leqslant 2k^{-\eta}$$

où on a posé $\eta = \alpha^{-2}\beta^{-2}$. En déduire que si $\alpha\beta < 1$, la variable aléatoire $\exp(\frac{\beta^2 X^2}{2})$ est d'espérance finie majorée par $1 + 2\zeta(\eta)$.

a) Soient X une var α-sous-gaussienne et $\beta > 0$.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Mq que : $P\left(\exp\left(\frac{\beta^2 X^2}{2}\right) \geqslant k\right) \leqslant 2k^{-\eta}$

où $\eta = \frac{1}{\alpha^2 \beta^2}$.

On a : $\left(\exp\left(\frac{\beta^2 X^2}{2}\right) \geqslant k\right) = \left(\frac{\beta^2 X^2}{2} \geqslant \ln k\right)$

$= \left(X^2 \geqslant \frac{2 \ln k}{\beta^2}\right)$

$\Rightarrow P\left(\exp\left(\frac{\beta^2 X^2}{2}\right) \geqslant k\right) = P\left(|X| \geqslant \frac{\sqrt{2}\sqrt{\ln k}}{\beta}\right)$

On pense à 12) $\forall \lambda > 0, \ P(|X| \geqslant \lambda) \leqslant 2\exp\left(-\frac{\lambda^2}{2\alpha^2}\right)$

Cas 1 : si $k \geqslant 2$:

$P\left(\exp\left(\frac{\beta^2 X^2}{2}\right) \geqslant k\right) = P\left(|X| \geqslant \frac{\sqrt{2}\sqrt{\ln k}}{\beta}\right)$

$\leqslant 2\exp\left(-\frac{\left(\frac{\sqrt{2}\sqrt{\ln k}}{\beta}\right)^2}{2\alpha^2}\right)$ (d'après 12))

$= 2\exp\left(-\frac{\ln(k)}{\alpha^2\beta^2}\right)$

$= 2\left(\exp(\ln(k))\right)^{-\frac{1}{\alpha^2\beta^2}} = 2 \cdot k^{-\frac{1}{\alpha^2\beta^2}}$

$\square$

Cas 2 : si $k=1$

$$P\left(\exp\left(\frac{\beta^2X^2}{2}\right)\geqslant k\right)=P\left(|X|\geqslant\frac{\sqrt{2}\sqrt{\ln k}}{\beta}\right)$$

$$=P(|X|\geqslant 0)$$

$$=P(\Omega)\qquad (\text{car } (|X|\geqslant 0)=\Omega)$$

$$=1$$

et $2k^{-\eta}=2$

Alors l'inégalité $P\left(\exp\left(\frac{\beta^2X^2}{2}\right)\geqslant k\right)\leqslant 2k^{-\eta}$ est vérifiée.

$\square$

b/ En déduire que si $\alpha\beta<1$, la variable aléatoire $\exp(\frac{\beta^2X^2}{2})$ est d'espérance finie majorée par $1+2\zeta(\eta)$.

Supposons que $\alpha\beta<1$, $\exp\left(\frac{\beta^2X^2}{2}\right)$ est d'espérance finie et $E\left(\exp\left(\frac{\beta^2X^2}{2}\right)\right)\leqslant 1+2\zeta(\eta)$

En effet : On pense à 13).

La var $\exp\left(\frac{\beta^2X^2}{2}\right)$ est positive, alors il suffit de vérifier que la série $\sum_k P\left(\exp\left(\frac{\beta^2X^2}{2}\right)\geqslant k\right)$ converge.

$$a) \Rightarrow \left(\forall k\geqslant 1,\ P\left(\exp\left(\frac{\beta^2X^2}{2}\right)\geqslant k\right)\leqslant 2\cdot\frac{1}{k^\eta}\right)$$

Or $\sum_{k\geqslant 1}\frac{1}{k^\eta}$ converge, car $\eta=\frac{1}{\alpha^2\beta^2}>1$

Alors la série $\sum_k P\left(\exp\left(\frac{\beta^2X^2}{2}\right)\geqslant k\right)$ converge $\square$

Mq que : $E\left(\exp\left(\frac{\beta^2 X^2}{2}\right)\right) \leqslant 1+2\zeta(\gamma)$

D'après 13°/ on a :

$$E\left(\exp\left(\frac{\beta^2 X^2}{2}\right)\right) \leqslant 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \overbrace{P\left(\exp\left(\frac{\beta^2 X^2}{2}\right) \geqslant k\right)}^{\leqslant 2k^{-\gamma}}$$

$$\leqslant 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2}{k^\gamma}$$

$$= 1+2\zeta(\gamma)$$

$\square$

Fin