Résumé

Séries numériques

I) Convergence d'une série

1) Généralités sur les séries

Soit $(u_n)_{n\succeq 0}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$).

Notons $S_n = u_0 + \cdots + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

Définitions 1 :

1) La suite $(S_n)_{n\succeq 0}$ s'appelle la série de terme général u_n.
   On la note $\sum_{n\succeq 0} u_n$.
2) On dit que la série $\sum_{n\succeq 0} u_n$ converge si et seulement si la suite $(S_n)_{n\succeq 0}$ converge.
3) Dans le cas contraire, on dit que la série diverge.

Notations et vocabulaire :

1) Supposons que la série $\sum_{n\succeq 0} u_n$ converge et $S = \lim_{n\to+\infty} S_n$.

   S s'appelle la somme de la série et se note $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.
2) $(S_n)_{n\succeq 0}$ s'appelle la suite des sommes partielle de la série $\sum_{n\succeq 0} u_n$.

Notation et vocabulaire :

Supposons que la série $\sum_{k\succeq 0} u_k$ **converge**.

Soit $n\in\mathbb{N}$. On sait que la série $\sum_{k\succeq n+1} u_k$ converge aussi.

1) La somme $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ se note R_n.
2) R_n s'appelle le reste d'ordre n de la série $\sum_{k\succeq 0} u_k$.

Proposition 2 :

Supposons que la série $\sum_{k\succeq 0} u_k$ converge. On a :

1) $\forall n\in\mathbb{N},\ S = S_n + R_n$
2) $\lim_{n\to+\infty} R_n = 0$

2) Condition nécessaire de convergence d'une série

Proposition :

Si la série $\sum_n u_n$ converge alors $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$.

NB :

Par contraposée, on a :

1) Si $(u_n)_n$ ne tend pas vers 0 alors la série $\sum_n u_n$ **diverge**.

2) Dans ce cas, on dit que la série $\sum_n u_n$ diverge grossièrement. (**DivG**)

3) Séries géométriques

Proposition :

Soit $q \in \mathbb{C}$.

1) $\sum_{n \succeq 0} q^n$ converge $\Leftrightarrow |q| \prec 1$

2) Dans ce cas : $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \dfrac{1}{1-q}$

NB :

Idem pour $\sum_{n \succeq N} q^n$. Et en cas de convergence on a : $\sum_{n=N}^{+\infty} q^n = \dfrac{q^N}{1-q}$

Proposition :

La suite $(u_n)_n$ converge **si et seulement si** la série télescopique $\sum_n (u_{n+1} - u_n)$ converge.

Corollaire 2 :

1) La somme d'une série convergente et une série divergente est une série divergente.
2) L'ensemble des séries convergentes est espace vectoriel.
3) L'application qui associe à une série convergente $\sum_{n \succeq 0} u_n$ sa somme $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est une forme linéaire.

6) Convergence d'une série complexe

Proposition :

Soient $\sum_{n\succeq 0} u_n$ une série complexe. On a :

1) $\sum_{n\succeq 0} u_n$ converge $\Leftrightarrow \sum_{n\succeq 0} Re(u_n)$ et $\sum_{n\succeq 0} Im(u_n)$ convergent

2) Le cas échéant, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} Re(u_n) + i \sum_{n=0}^{+\infty} Im(u_n)$$

II) Séries à termes positifs

Toutes les séries qu'on verra dans ce paragraphe seront réelles positives.

1) Généralités

Proposition 1 :

$\sum_n u_n$ converge $\Leftrightarrow (S_n)_n$ est majorée.

Corollaire 2 :

Si $\sum_n u_n$ diverge alors $\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$

Proposition 3 :

Soient $\sum_n u_n$ et $\sum_n v_n$ deux séries à termes positifs verifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \preceq v_n$$

1) a) $\sum_n v_n$ *converge* $\Rightarrow \sum_n u_n$ *converge*

b) En cas de convergence, on a $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \preceq \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$

2) $\sum_n u_n$ *diverge* $\Rightarrow \sum_n v_n$ *diverge*

Corollaire 4 :

Soient $\sum_n u_n$ et $\sum_n v_n$ deux séries à termes positifs verifiant : $u_n = O(v_n)$.

On a :

1) $\sum_n v_n \; converge \Rightarrow \; \sum_n u_n \; converge$

2) $\sum_n u_n \; diverge \Rightarrow \; \sum_n v_n \; diverge$

NB :

Le corollaire 4 vaut aussi si on a $u_n = o(v_n)$.

Corollaire 5 :

Soient $\sum_n u_n$ et $\sum_n v_n$ deux séries à termes positifs verifiant : $u_n \sim v_n$.

On a :

1) $\sum_n u_n \; converge \Leftrightarrow \; \sum_n v_n \; converge$

2) $\sum u_n \; diverge \Leftrightarrow \; \sum v_n \; diverge$

2) Séries de Riemann

Définition 1 :

Les séries de Riemann sont les séries de la forme $\sum_{n \succeq 1} \frac{1}{n^\alpha}$, où $\alpha \in \mathbb{R}$.

Proposition 2 :

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On a :

1) $\sum_{n \succeq 1} \frac{1}{n^\alpha} \; converge \; \Leftrightarrow \; \alpha \succ 1$

2) $\sum_{n \succeq 1} \frac{1}{n^\alpha} \; diverge \; \Leftrightarrow \; \alpha \preceq 1$

Corollaire 3 : (Règle de $n^\alpha u_n$)

Soit $\sum_n u_n$ une série à termes positifs.

1) $\left(\begin{array}{l} u_n = o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) \\ \alpha \succ 1 \end{array} \right) \Rightarrow \sum_n u_n \; converge$

2) $\left(\begin{array}{l} \frac{1}{n^\alpha} = o\left(u_n\right) \\ \alpha \preceq 1 \end{array} \right) \Rightarrow \sum_n u_n \; diverge$

NB : Le corollaire 3 vaut aussi si on remplace "o" par "O".

3) Règle de D'Alembert

Proposition 3 : (Règle de D'Alembert)

Soit $\sum_n u_n$ une série à termes strictement positifs.

Notons $l = \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$.

1) $l \prec 1 \ \Rightarrow \ \sum_n u_n \ converge$

2) $l \succ 1 \ \Rightarrow \ \sum_n u_n \ diverge$

3) Si $l = 1$, on ne peut rien conclure sur la convergence ; (c-à-d que tout est possible)

4) Comparaison série-intégrale

Proposition 1 :

Soient $n_0 \in \mathbb{N}$ et $f : [n_0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$.

Si f est positive, continue par morceaux et décroissante **alors** :

$$\forall k \succeq n_0 + 1, \ \int_k^{k+1} f(t)dt \preceq f(k) \preceq \int_{k-1}^{k} f(t)dt$$

Corollaire 2 :

Soient $n_0 \in \mathbb{N}$ et $f : [n_0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$.

Si f est positive, continue par morceaux et décroissante **alors** la série $\sum_n \left(\int_{n-1}^{n} f(t)dt - f(n) \right)$ converge.

Proposition (Nature d'une série de Riemann)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On a

$$\sum_{n \succeq 1} \frac{1}{n^\alpha} \ converge \ \Leftrightarrow \ \alpha \succ 1$$

III) Séries alternées

Définition 1 :

On appelle série alternée toute série de l'une des formes suivantes :

$$\sum_n (-1)^n \alpha_n \ ou \ \sum_n (-1)^{n-1} \alpha_n$$

où $(\alpha_n)_n$ est une suite positive.

Proposition 2 : (Critère spécial pour les séries alternées)

Ou (Critère de Leibniz).

Soit $(\alpha_n)_{n\succeq n_0}$ une suite **décroissante** de **limite nulle**. On a :

1) La série alternée $\displaystyle\sum_{n\succeq n_0}(-1)^n\alpha_n$ converge.

2) $\forall n\succeq n_0,\ signe\,(R_n) = signe\,(du\ 1er\ terme\ dans\ R_n)$

3) $\forall n\succeq n_0,\ |R_n| \preceq |du\ 1er\ terme\ dans\ R_n|$

4) $signe\left(S=\displaystyle\sum_{k=n_0}^{+\infty}(-1)^k\alpha_k\right) = signe\,(du\ 1er\ terme\ dans\ la\ somme\ S)$

où $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}(-1)^k\alpha_k$

IV) Séries absolument convergentes

Définition 1 :

Soit $(u_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. La série $\displaystyle\sum_n u_n$ est dite absolument convergente si et seulement si la série positive $\displaystyle\sum_n |u_n|$ converge.

Proposition 2 :

Toute série ACV est convergente.

Proposition 3 :

Soient $(u_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et $\displaystyle\sum_n \alpha_n$ une série positive.

$$\textbf{Si}\begin{cases} u_n = O(\alpha_n) \\ \displaystyle\sum_n \alpha_n\ converge \end{cases}\ \textbf{alors}\ \sum_n u_n \text{ est absolument convergente.}$$

Proposition 4 : (Règle de D'Alembert)

Soient $(u_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ ne s'annulant pas à partir d'un rang.

Notons $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = L$.

1) Si $L \prec 1$ alors $\displaystyle\sum_n u_n$ est absolument convergente.

2) Si $L \succ 1$ alors $\displaystyle\sum_n u_n$ diverge grossièrement.

3) Si $L = 1$, on ne peut rien conclure.

V) Sommation des relations de comparaison

1) Comparaison des restes

Proposition :

Soient $\sum\limits_n u_n$ une série à termes dans $\mathbb{K}$ et $\sum\limits_n \alpha_n$ une série à termes positifs.

1) Si $\begin{cases} u_n = o(\alpha_n) \\ \sum\limits_n \alpha_n \textit{ converge} \end{cases}$ alors $\left(\sum\limits_{k=n}^{+\infty} u_k\right) = o\left(\sum\limits_{k=n}^{+\infty} \alpha_k\right)$

2) Si $\begin{cases} u_n = O(\alpha_n) \\ \sum\limits_n \alpha_n \textit{ converge} \end{cases}$ alors $\left(\sum\limits_{k=n}^{+\infty} u_k\right) = O\left(\sum\limits_{k=n}^{+\infty} \alpha_k\right)$

3) Si $\begin{cases} u_n \sim \alpha_n \\ \sum\limits_n \alpha_n \textit{ converge} \end{cases}$ alors $\left(\sum\limits_{k=n}^{+\infty} u_k\right) \sim \left(\sum\limits_{k=n}^{+\infty} \alpha_k\right)$

2) Comparaison des sommes partielles

Proposition :

Soient $\sum\limits_n u_n$ une série à termes dans $\mathbb{K}$ et $\sum\limits_n \alpha_n$ une série à termes positifs.

1) Si $\begin{cases} u_n = o(\alpha_n) \\ \sum\limits_n \alpha_n \textit{ diverge} \end{cases}$ alors $\left(\sum\limits_{k=0}^{n} u_k\right) = o\left(\sum\limits_{k=0}^{n} \alpha_k\right)$

2) Si $\begin{cases} u_n = O(\alpha_n) \\ \sum\limits_n \alpha_n \textit{ diverge} \end{cases}$ alors $\left(\sum\limits_{k=0}^{n} u_k\right) = O\left(\sum\limits_{k=0}^{n} \alpha_k\right)$

3) Si $\begin{cases} u_n \sim \alpha_n \\ \sum\limits_n \alpha_n \textit{ diverge} \end{cases}$ alors $\left(\sum\limits_{k=0}^{n} u_k\right) \sim \left(\sum\limits_{k=0}^{n} \alpha_k\right)$

Fin