Structures algébriques usuelles
Résumé Lacunaire

Groupes :

Loi de composition interne (LCI)

Def :
Soit G un ensemble non vide.
On appelle Loi de composition interne sur G, toute application de $G \times G$ vers G

NB : Soit T est une LCI sur G, on a donc :
$\forall x, y \in G$, ([redacted]) $\in G$

Déf : Soit $*$ une LCI sur E.

1/ Commutativité :
$*$ est dite commutative si et ssi ($\forall x, y \in E$, [redacted] $=$ [redacted])

2/ Associativité :
$*$ est dite associative si et ssi ($\forall x, y, z \in E$, [redacted] $=$ [redacted])

3/ Element neutre :
Soit $e \in E$
e est dite element neutre si et ssi :

$\forall x \in E$, $\begin{cases} x * e = \text{[redacted]} \\ \text{[redacted]} = \text{[redacted]} \end{cases}$

4/ Élément inversible :

Soit $a \in E$, Soit e l'élément neutre.
a est dit **inversible** si et ssi : $\exists b \in E$, $\begin{cases} [redacted] = e \\ \text{et} \\ [redacted] = e \end{cases}$

Voc et notation :
Dans ce cas, b s'appelle [redacted] de a et se note a^{-1}.

5/ Distributivité

$*$ et T deux LCI sur E.
On dit que $*$ est **distributive** par rapport à T.
si et ssi :

$$\forall x, y, z \in E, \quad x * (y T z) = [redacted]$$

NB :

1) Supp a est inversible, on a : $\begin{cases} a * a^{-1} = [redacted] \\ a^{-1} * a = [redacted] \end{cases}$

2) e inversible et $e^{-1} = [redacted]$
→ car [redacted] $*$ [redacted] $=$ [redacted].

Prop 3 : Supp que a et b sont inversibles.
$*$ étant associative
Alors $(a*b)$ est aussi inversible et on a

$$(a*b)^{-1} = [redacted]$$

Déf 4 : (Partie stable par $*$)

Soit $*$ une LCI sur E.
Soit H une partie de E.
H est dite **stable par $*$** si et ssi
$(\forall x, y \in H,\ x*y$ [redacted]

Groupes :

Déf Soit $*$ une LCI sur l'ensemble non vide G.
$(G,*)$ est dit **groupe** si et ssi :

1) $*$ est [redacted]
2) $*$ admet un [redacted]
3) Tout élément de G est [redacted]

Vocabulaire :

Si $(G,*)$ est un groupe et que $*$ est commutative, on dit que $(G,*)$ est un groupe [redacted] ou [redacted].

Prop 2 :

X un ensemble non vide (qlq).
$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
$(\mathbb{K}^X, +)$ est un **groupe abélien** d'élément neutre [redacted]

Prop 3 :

E est un ensemble non vide.
$(S_E, \circ)$ est un groupe d'élément neutre [redacted]

Sous-groupes

Def 1 :

Soient $(G,*)$ un groupe d'élément neutre e, et $H \subset G$.
H est dit **sous groupe** de G si et ssi

[redacted] $\in H$

2) $\forall x, y \in H$, [redacted] $\in H$

3) $\forall x \in H$, [redacted] $\in H$

NB$_1$: Ici $(G,+)$ est un groupe d'élément neutre 0, et $H \subset G$; H est dit un **sous-groupe** de G si et ssi

[redacted] $\in H$

2) $\forall x, y \in H$, [redacted] $\in H$

3) $\forall x \in H$, [redacted] $\in H$

Prop 2 :

$(G,*)$ est un groupe et $H \subset G$, on a :

H **sous-groupe** de $G \Leftrightarrow \begin{cases} i) & [redacted] \in H \\ ii) & \forall x, y \in H, [redacted] \in H \end{cases}$

NB$_1$: Ici $(G,+)$ groupe d'élément neutre 0 et $H \subset G$, on a :

H est **s-groupe** de $G \Leftrightarrow \begin{cases} i) & [redacted] \in H \\ ii) & \forall x, y \in H, [redacted] \in H \end{cases}$

NB : $\{e\}$ et G sont deux [redacted] de $(G,*)$.

Prop 3 :

Si H est un s-groupe du groupe $(G,*)$ alors $(H,*)$ est aussi [redacted]

Remarque pratique :

Pour montrer qu'un ensemble est un groupe, des fois il est plus facile de procéder en montrant que c'est un sous groupe.

Prop 4 (Intersection de s-gr)

Soit $(G,*)$ un groupe.
Toute intersection de sous groupes de G est un sous-groupe de G.

C.à.d : Si $(H_i)_{i\in I}$ est une famille de s-gr de G alors [redacted] est un s-gr de G.

Attention

La réunion de deux s-gr [redacted] un s-gr.

Anneaux :

Déf 1

Soit A un ensemble non vide muni de deux LCI "+" et "x".
On dit que $(A,+,\times)$ est un anneau si et ssi :

1/ $(A,+)$ est un [redacted] (avec la $1^{ère}$ loi).

2/ $\times$ est [redacted] et [redacted] ($2^{ème}$ loi).

3/ $\times$ est [redacted]

Vocabulaire Si la loi [redacted] est commutative on dit que l'anneau $(A,+,\times)$ est commutatif.

Exemple 2 :
$\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. X ensemble non vide qlque.
$(\mathbb{K}^X,+,\times)$ est un anneau commutatif d'éléments neutres respectifs la fonction [redacted] et la fonction [redacted]

Exemple 3 :
Cas particulier de l'exemple 2 avec $\mathbb{N}=X$.
L'ensemble [redacted] $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (resp complexes $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$)
est un anneau commutatif d'éléments neutres resp [redacted] et la [redacted]

2/ Anneau intègre

Déf : Soit $(A,+,\times)$ un anneau.
A est dit anneau intègre si et ssi :

$\forall a,b \in A$, [redacted] $=0 \Rightarrow$ ([redacted] ou [redacted])

NB₁ : Dans un anneau intègre on a :

$ab=0 \Leftrightarrow$ ([redacted] ou [redacted])

NB₂ : Si A intègre on a :

$ab \neq 0 \Leftrightarrow$ ([redacted])

Calculs dans un anneau

prop :

Soit $(A,+,\times)$ anneau. On a :

$\forall a \in A$, $0 \times a =$ [redacted] et $a \times 0 =$ [redacted]

Réflexes sur les groupes :

1/ $(G,\cdot)$ groupe d'élément neutre e.

$ab = c \Leftrightarrow b =$ [redacted] (non pas : $b =$ [redacted])

$ab = ac \Leftrightarrow b =$ [redacted]

2/ $(G,+)$ groupe d'élément neutre e

$a+b = c \Leftrightarrow b =$ [redacted]

$a+b = c \Leftrightarrow a =$ [redacted] (non pas $a =$ [redacted])

$a+b = a+c \Leftrightarrow b =$ [redacted]

Prop 2 :

$(A,+,\times)$ anneau.

Soient a et $b \in A$ tq [redacted]. On a :

1/ $\forall n \in \mathbb{N}$, [redacted]

2/ $\forall n \in \mathbb{N}$, $(a+b)^n = \sum_{k=[redacted]}$ [redacted]

Formule de binôme de Newton

3/ $\forall n \in \mathbb{N}$, $a^n - b^n = (a-b) \sum_{k=[redacted]}$ [redacted]

Égalité de Bernoulli

4) Éléments inversibles d'un anneau.

Déf 1 :
Soit $(A,+,\times)$ un anneau.
Les éléments inversibles de A sont les inversibles pour [redacted]

Notation :
$\mathcal{U}(A)$: désignera l'ensemble [redacted]

Prop 2 : Soit $(A,+,\times)$ un anneau.
$(\mathcal{U}(A),$ [redacted] $)$ est un groupe.

5) Corps

Déf 1
Soit $(K,+,\times)$ un anneau commutatif, non réduit à $\{0\}$.
$(K,+,\times)$ est un Corps si et seulement si [redacted]

Exemples usuels de Corps
$(\mathbb{Q},+,\times)$; $(\mathbb{R},+,\times)$, $(\mathbb{C},+,\times)$ sont des Corps.
$(\mathbb{Z},+,\times)$ est un [redacted]

NB 1
1) Si $(K,+,\times)$ est un Corps, alors $\mathcal{U}(K) =$ [redacted]
2) Un Corps est par définition Commutatif.

NB :

1) Tout Corps est un anneau intègre.

2) La réciproque est [redacted]

Fin