Séries entières

COURS

Notations :

Soient $a \in \mathbb{C}$ et $r > 0$.

- $D(a,r) = \{z \in \mathbb{C} / |z-a| < r\}$, le disque ouvert de centre a et de rayon r.
- $\overline{D}(a,r) = \{z \in \mathbb{C} / |z-a| \leq r\}$, le disque fermé de centre a et de rayon r.

I) Généralités

1) Définitions et exemples

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe.

Déf 1 La série entière associée à la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$.

Vocabulaire :

Le domaine de convergence de la série entière (SE) $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ est l'ensemble des complexes z tels que la série complexe $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ converge.

$z \in D \iff \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ converge

Autrement dit :

C'est le domaine de définition de la fonction :

$$f : z \in \mathbb{C} \longmapsto f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

⚠ **NB :** Pour $z = 0$, toute SE $\sum_n a_n z^n$ converge.

Rappels

1) $\sum w_n$ diverge grossièrement $\iff w_n \not\to 0 \iff |w_n| \not\to 0$

2) (Critère de D'Alembert)

Soit $\sum_{n\geq 0} U_n$ une série à termes strictement positifs.

Supposons $\lim_{n\to+\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = L$.

a) Si $L < 1$ alors la série $\sum_{n\geq 0} U_n$ converge.

b) Si $L > 1$ alors la série $\sum_{n\geq 0} U_n$ diverge grossièrement.

c) Si $L = 1$, on ne peut rien conclure.

Exemples : Pour chacune des SE suivantes, déterminer le domaine de convergence :

1) $\sum_{n\geq 0} z^n$

2) $\sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}$

3) $\sum_{n\geq 0} \frac{z^{2n}}{n!}$

4) $\sum_{n\geq 0} n!\, z^n$

Solution

Notons D le domaine de convergence voulu.

$z \in D \iff \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ converge

1) Pour $\sum_{n\geq 0} z^n$:

$z \in D \iff |z| < 1$

$D = D(0,1)$

2) Pour $\sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}$. (On utilisera le critère de D'Alembert)

Cas 1 : si $z = 0$

$\sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}$ converge. Donc $0 \in D$.

Cas 2 : si $z \in \mathbb{C}^*$

Notons $U_n = \left|\frac{z^n}{n!}\right|$.

$\sum_{n\geq 0} U_n$ est alors une série à termes strict positifs.

On peut ainsi appliquer D'Alembert.

On a $\lim_{n} \frac{U_{n+1}}{U_n} = 0 < 1$

D'où $\sum_{n\geq 0} U_n$ CV ; c.à.d $\sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}$ est ACV

$$\Rightarrow \sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!} \text{ CV.}$$

Ainsi : $(\forall z \in \mathbb{C}^*, z \in D)$

C/C : $D = \mathbb{C}$ pour la SE $\sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}$

3) Pour $\sum_{n\geq 0} \frac{z^{2n}}{n!}$: ici ; $\begin{cases} a_{2n} = 1/n! \\ a_{2n+1} = 0 \end{cases}$

On procède comme au 2°/, on trouve $D = \mathbb{C}$ aussi.

À détailler chez vous.

4) Pour $\sum_{n\geq 0} n! z^n$: (On utilisera le critère de D'Alembert)

Cas 1 : si $z = 0$

$\sum_{n\geq 0} n! z^n$ converge. Donc $0 \in D$.

$z \in D \Leftrightarrow \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ converge

Cas 2 : si $z \in \mathbb{C}^*$

Notons $U_n = |n! z^n|$

$\sum_{n\geq 0} U_n$ est alors une série à termes strict positifs.

On a $\lim_{n} \frac{U_{n+1}}{U_n} = \dots = \lim_{n\to+\infty} |z|(n+1) = +\infty > 1$

D'Alembert $\Rightarrow \sum_{n\geq 0} |n! z^n|$ Div G

$\Rightarrow \sum_{n\geq 0} n! z^n$ Div G

$\Rightarrow \sum_{n\geq 0} n! z^n$ Div

$\sum_n |x_n|$ CV $\Rightarrow \sum_n x_n$ CV

C.à.d

$\sum_n x_n$ DIV $\Rightarrow \sum_n |x_n|$ DIV

par contraposée

Ainsi : $\begin{cases} \forall z \in \mathbb{C}^*, z \notin D \\ 0 \in D \end{cases}$

c/c : $\boxed{D = \{0\} \text{ pour la SE } \sum_{n \geq 0} n! z^n}$

2) Rayon de Convergence d'une SE

Lemme d'Abel

Soit $z_0 \in \mathbb{C}^*$ tel que la suite $(a_n z_0^n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit bornée. On a :

$$\forall |z| < |z_0|, \sum_{n \geq 0} a_n z^n \text{ est ACV}$$

Démo (en bref)

Supp que $|z| < |z_0|$.

$$\forall n \in \mathbb{N}, |a_n z^n| = \underbrace{|a_n z_0^n|}_{\leq M} \cdot \left(\frac{|z|}{|z_0|}\right)^n \leq M \cdot \left(\frac{|z|}{|z_0|}\right)^n$$

Or $\sum_n M\left(\frac{|z|}{|z_0|}\right)^n$ CV, car $\frac{|z|}{|z_0|} < 1$

Alors $\sum |a_n z^n|$ CV

Déf 1 (Rayon de Convergence)

Le rayon de convergence de la SE $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ est :

$$R = \sup\left(\{r \geq 0 \,/\, (a_n r^n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est une suite bornée}\}\right)$$

NB

R peut être infini, c'est le cas où l'ensemble suivant n'est pas majoré :

$$\{r \geq 0 \,/\, (a_n r^n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est une suite bornée}\}$$

Exemples

Déterminer le rayon de convergence de chacune des SE suivantes :

1) $\sum_{n\geq 0} z^n$

2) $\sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}$

3) $\sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n}$

4) $\sum_{n\geq 0} n!\, z^n$

NB On disposera d'un outil plus efficace.

Sol

1) $\sum_{n\geq 0} z^n$:

$$\{r\geq 0 \,/\, (r^n)_n \text{ bornée}\} = [0,1]$$

$$\Rightarrow \boxed{R = 1} \quad \square$$

2) $\sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}$:

$$\{r\geq 0 \,/\, \left(\frac{r^n}{n!}\right)_n \text{ bornée}\} = [0,+\infty[$$

Car : $\left(\forall r>0,\ \frac{r^n}{n!} = \frac{e^{n(\ln r)}}{n!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0\right)$

puisqu'au voisinage de $(+\infty)$, la factorielle l'emporte sur l'exponentielle.

$$\Rightarrow \boxed{R = +\infty} \quad \square$$

3) $\sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n}$:

$$\{r\geq 0 \,/\, \left(\frac{r^n}{n}\right)_{n\geq 1} \text{ bornée}\} = [0,1]$$

Car $\lim_n \frac{r^n}{n} = \begin{cases} 0 & \text{si } 0\leq r\leq 1 \\ +\infty & \text{si } r>1 \end{cases}$

$$\Rightarrow \boxed{R = 1} \quad \square$$

4) $\sum_{n\geq 0} n!\,z^n$:

$\{r\geq 0 \,/\, (n!\,r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ borné}\} = \{0\}$

Car $\left(\forall r>0,\ \lim_{n\to+\infty} n!\,r^n = +\infty\right)$, puisque la factorielle l'emport sur l'exponentielle au voisinage de $+\infty$.

D'où $R = 0$ $\triangle$

Prop 2 Soit R le rayon de convergence de la SE $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$.

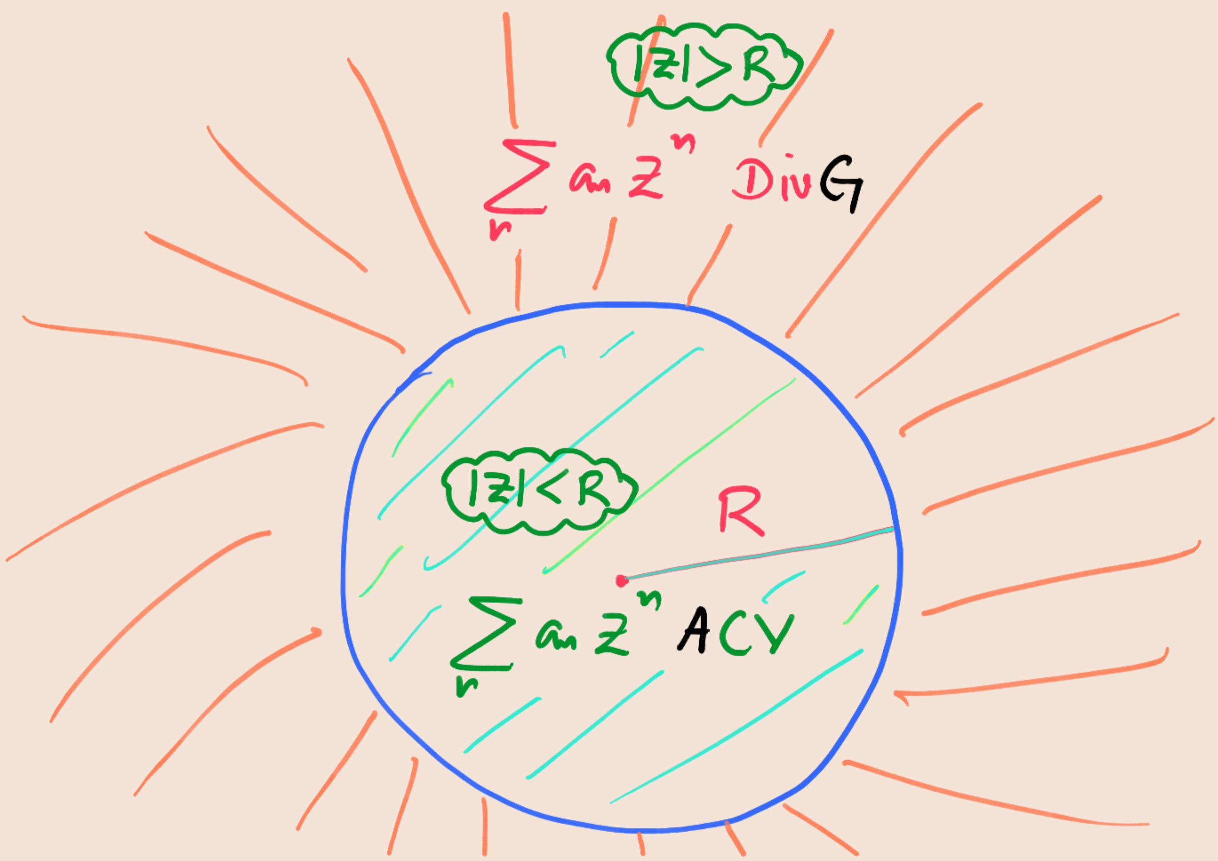
On a :

1) $\forall |z| < R$, $\sum_n a_n z^n$ ACV

2) $\forall |z| > R$, $\sum_n a_n z^n$ DivG

3) Si $|z| = R$, on ne peut rien conclure.

Schéma



Démo

1) Supp que $|z|<R$, et montrons que $\sum_n a_n z^n$ ACV.

On a $\begin{cases} R = \sup(\{r \geq 0 / (a_n r^n)_n \text{ bornée}\}) \\ |z| < R \end{cases}$

$\Rightarrow \left(\exists r>0,\ (a_n r^n)_n \text{ bornée et que } |z|<r\right)$

(Lemme d'Abel) $\Rightarrow \sum_n a_n z^n$ ACV

2) Supp que $|z|>R$ et m. que $\sum_n a_n z^n$ DIVG.

Càd montrons que $a_n z^n \underset{n\to+\infty}{\not\longrightarrow} 0$.

Raisonnons par l'absurde, et supp que $\lim_{n\to+\infty}(a_n z^n)=0$.

Alors $(a_n z^n)_n$ est bornée.

$\Rightarrow (a_n |z|^n)_n$ est bornée.

$\Rightarrow R \geq |z|$, par définition de R.

Ce qui contredit $|z|>R$

Réflexes à avoir

Soit R le RCV de la SE $\sum_n a_n z^n$. On a :

1) $\begin{pmatrix} (a_n \rho^n)_n \text{ bornée} \\ \rho \geq 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow R \geq \rho$

2) $(a_n)_n$ bornée $\Longrightarrow R \geq 1$

3) $\begin{pmatrix} \sum a_n \rho^n \text{ CV} \\ \rho \geq 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow R \geq \rho$

4) $\begin{pmatrix} \sum a_n \rho^n \text{ Div} \\ \rho \geq 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow R \leq \rho$

5) $\left(\forall |z| < \rho, \sum_n a_n z^n \text{ CV}\right) \Longrightarrow R \geq \rho$

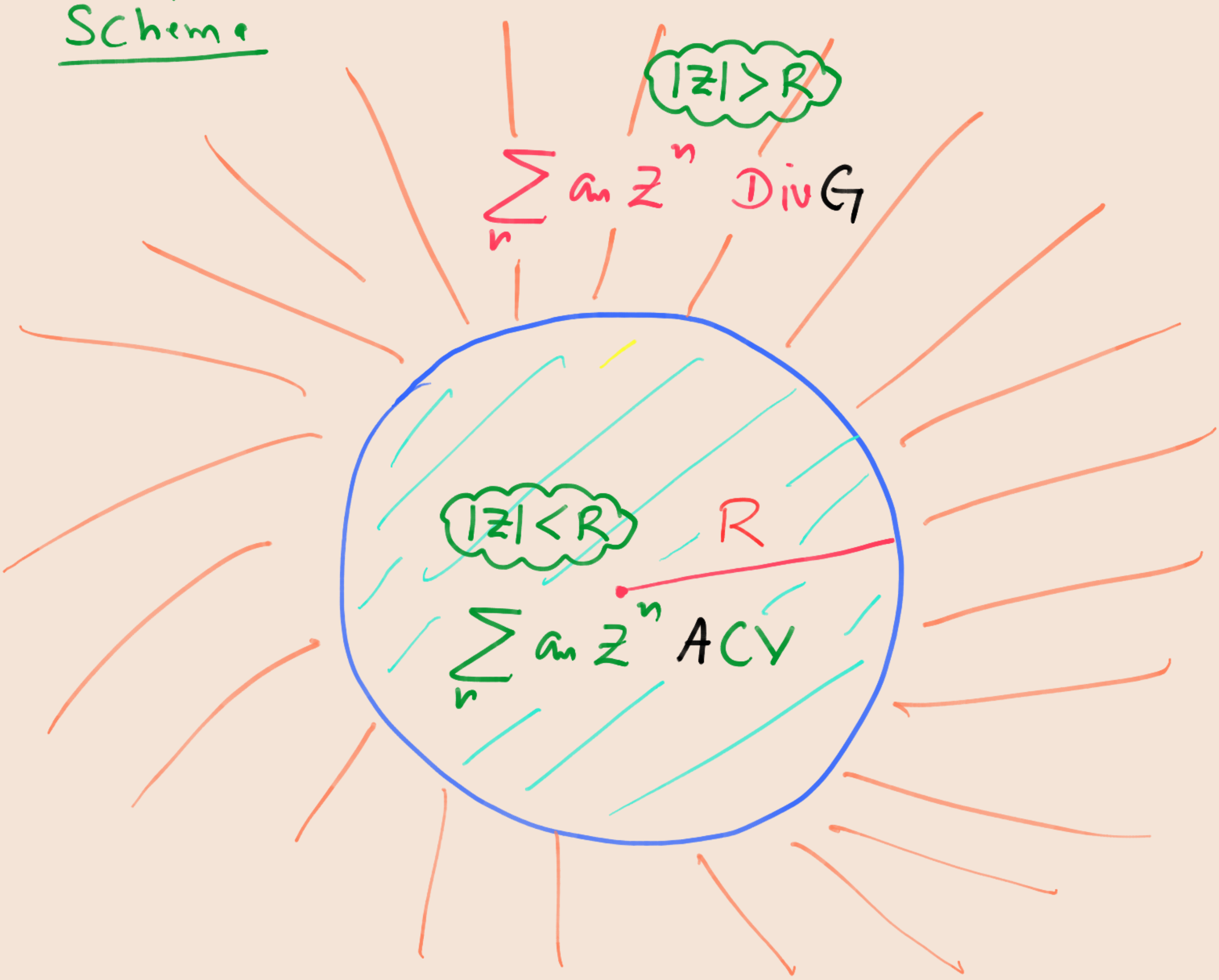
6) $\left(\forall |z| > \rho, \sum_n a_n z^n \text{ Div}\right) \Longrightarrow R \leq \rho$

7) $\begin{pmatrix} \forall |z| < \rho, \sum a_n z^n \text{ CV} \\ \forall |z| > \rho, \sum a_n z^n \text{ Div} \end{pmatrix} \Longrightarrow R = \rho$

8) $\left(\forall z \in \mathbb{C}, \sum a_n z^n \text{ CV}\right) \Longleftrightarrow R = +\infty$

9) $\left(\forall z \in \mathbb{C}^*, \sum a_n z^n \text{ Div}\right) \Longleftrightarrow R = 0$

Schéma



NB : Soit R le RCV de la SE $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$.

1) Soit Δ le domaine de convergence de cette SE.

C'àd $\Delta = \{z \in \mathbb{C} / \sum_n a_n z^n \text{ converge}\}$

C'àd $\Delta = D_g$; où $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$; $g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$

A) On a : $D(0,R) \subset \Delta \subset \overline{D}(0,R)$

B) g est au moins définie sur $D(0,R)$.

2) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

A) D_f est l'un des intervalles suivants :

$]-R,R[$, $[-R,R]$, $]-R,R]$, $[-R,R[$

B) f est au moins définie sur $]-R,R[$

Vocabulaire

1) $D(0,R)$ s'appelle le disque ouvert de convergence de la SE $\sum_n a_n z^n$.

2) $]-R,R[$ s'appelle l'intervalle ouvert de convergence de la SE $\sum_n a_n z^n$.

3) Règle pratique de calcul du rayon de convergence

Prop (Critère de D'Alembert pour les SE)

Supposons que $(a_n)_n$ ne s'annule pas.

Soit R le RCV de la SE $\sum_n a_n z^n$.

Notons $\ell = \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$. On a :

$$R = \frac{1}{\ell}$$

Convention : $\frac{1}{+\infty} = 0$ et $\frac{1}{0} = +\infty$

Exercice d'application (Exemple déjà vu)

Retrouver le rayon de convergence de chacune des SE suivantes :

1) $\sum_{n \geq 0} z^n$

2) $\sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!}$

3) $\sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{n}$

4) $\sum_{n \geq 0} n! \, z^n$

Solution

1) $\sum_{n \geq 0} z^n$

Notons $\ell = \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$.

On a : $R = \frac{1}{\ell}$

$a_n = 1$

$\lim_n \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1$

$$\boxed{R = \frac{1}{\ell} = 1}$$

2) $\sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}$

Notons $l = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$.

On a : $R = \frac{1}{l}$

$a_n = \frac{1}{n!}$

$\lim_n \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 0$; $\boxed{R = +\infty}$

3) $\sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n}$

Notons $l = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$.

On a : $R = \frac{1}{l}$

$a_n = \frac{1}{n}$

$\lim_n \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$; $\boxed{R = 1}$

4) $\sum_{n\geq 0} n!\, z^n$

Notons $l = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$.

On a : $R = \frac{1}{l}$

$a_n = n!$

$\lim_n \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = +\infty$; $\boxed{R = 0}$

Démo de la prop :

On utilise le critère de D'Alembert pour les SATP ; appliqué à $\sum_n |a_n z^n|$.

1) Supp que $l \in]0,+\infty[$, et montrons que $R = \frac{1}{l}$:

Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Notons $U_n = a_n z^n$.

$\lim_{n\to+\infty} \frac{|U_{n+1}|}{|U_n|} = \lim_n \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \cdot |z| = |z| \cdot l$

Alors d'après le critère de D'Alembert appliqué à $\sum_n |U_n|$

On a : $\begin{cases} \forall |z| < \frac{1}{l}, \sum_n |a_n z^n| \text{ CV} \\ \forall |z| > \frac{1}{l}, \sum_n |a_n z^n| \text{ DivG} \end{cases}$

$\Longrightarrow \begin{cases} \forall |z| < \frac{1}{l}, \sum_n a_n z^n \text{ ACV} \\ \forall |z| > \frac{1}{l}, \sum_n a_n z^n \text{ DivG} \end{cases}$

D'où $R = \frac{1}{l}$

2) Supp que $l = 0$, et montrons que $R = +\infty$

C.à.d $\boxed{\text{M.que} : (\forall z \in \mathbb{C}, \sum a_n z^n \text{ CV})}$

Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Posons $U_n = a_n z^n$.

On a $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{|U_{n+1}|}{|U_n|} = \lim\limits_n \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} |z| = 0 < 1$

D'où d'après D'Alembert, $\sum_n |U_n|$ CV

$\Longrightarrow \sum_n a_n z^n$ CV $\square$

3) Supp que $l = +\infty$, et montrons que $R = 0$

C.à.d $\boxed{\text{M.que} : (\forall z \in \mathbb{C}^*, \sum a_n z^n \text{ Div})}$

Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Posons $U_n = a_n z^n$.

On a $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{|U_{n+1}|}{|U_n|} = \lim\limits_n \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} |z| = +\infty > 1$.

D'où d'après D'Alembert, $\sum_n |U_n|$ DivG.

$\Longrightarrow \sum_n a_n z^n$ DivG $\square$

fin démo

Remarque importante :

Dans le Critère de D'Alembert pour les SE, on doit avoir que la suite $(a_n)_n$ ne s'annule pas.
Si Ceci n'est pas vérifié, on peut appliquer le Critère de D'Alembert à la SATP $\sum_n |a_n z^n|$; voir les exemples ci-après.

Exemple 1

Déterminons le RCV de chacune des SE suivantes :

1) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{z^{2n}}{n+1}$; 2) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} C_{2n}^{n} z^{4n}$

Solution

1) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{z^{2n}}{n+1}$

Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Posons $U_n = \dfrac{z^{2n}}{n+1}$.

On a : $\displaystyle\lim_n \frac{|U_{n+1}|}{|U_n|} = |z|^2$.

Alors d'après D'Alembert appliqué à la SATP $\sum_n |U_n|$, on a :

$$\begin{cases} |z|^2 < 1 \Rightarrow \sum |U_n| \text{ CV} \\ |z|^2 > 1 \Rightarrow \sum |U_n| \text{ DivG} \end{cases}$$

Et donc : $$\begin{cases} |z| < 1 \Rightarrow \sum_n U_n \text{ ACV} \\ |z| > 1 \Rightarrow \sum_n U_n \text{ DivG} \end{cases}$$

Soit : $$\begin{cases} |z| < 1 \Rightarrow \sum_n \frac{z^{2n}}{n+1} \text{ ACV} \\ |z| > 1 \Rightarrow \sum_n \frac{z^{2n}}{n+1} \text{ DivG} \end{cases}$$

Enfin : $R = 1$

2) $\sum_{n\geq 0} C_{2n}^{n} z^{4n}$

Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Posons $U_n = C_{2n}^{n} z^{4n}$

On a : $\lim_n \frac{|U_{n+1}|}{|U_n|} = 4|z|^4$

Alors d'après D'Alembert appliqué à la SATP $\sum_n |U_n|$, on a :

$$\begin{cases} 4|z|^4 < 1 \Rightarrow \sum |U_n| \text{ CV} \\ 4|z|^4 > 1 \Rightarrow \sum |U_n| \text{ DivG} \end{cases}$$

Soit :
$$\begin{cases} |z| < \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \sum_n C_{2n}^{n} z^{4n} \text{ ACV} \\ |z| > \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \sum_n C_{2n}^{n} z^{4n} \text{ DivG} \end{cases}$$

D'où $R = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Exemples 2 (CNC 2018)

Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le rayon de Convergence des SE suivantes :

1) $\sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!(n+k)!} z^k$

☆ 2) $\sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{2^{2k} k!(n+k)!} z^{2k}$

Solution

1) $\sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!(n+k)!} z^k$

Notons $a_k = \dfrac{1}{k!\,(n+k)!}$, pour tout $k \geqslant 0$.

On a $\lim\limits_{k\to+\infty} \left|\dfrac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim\limits_{k\to+\infty} \dfrac{k!\,(n+k)!}{(k+1)!\,(n+k+1)!}$

$$= \lim_{k\to+\infty} \frac{1}{(k+1)(n+k+1)}$$

$$= 0$$

D'où $R = +\infty$ $\square$

☆ 2) $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} \frac{(-1)^k}{2^{2k}\,k!\,(n+k)!} z^{2k}$

Notons que (a_k) s'annule, alors le critère de D'Alembert pour les SE n'est pas applicable.

Soit $z \in \mathbb{C}^*$.

Appliquons alors D'Alembert pour la série à termes strictement positifs $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} |U_k|$; où $U_k = \dfrac{(-1)^k}{2^{2k}\,k!\,(n+k)!} z^{2k}$

On a $\lim\limits_{k\to+\infty} \dfrac{|U_{k+1}|}{|U_k|} = \lim\limits_{k\to+\infty} \dfrac{2^{2k}\,k!\,(n+k)!}{2^{2k+2}(k+1)!\,(n+k+1)!} \dfrac{|z|^{2k+2}}{|z|^{2k}}$

$$= \lim_{k\to+\infty} \frac{|z|^2}{2^2\,(k+1)(n+k+1)}$$

$$= 0 < 1$$

D'où $\forall z \in \mathbb{C}^*, \sum_{k \geq 0} |u_k|$ CV

Càd : $\forall z \in \mathbb{C}^*, \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{2^{2k} k! (n+k)!} z^{2k}$ ACV

$\Rightarrow \quad \forall z \in \mathbb{C}^*, \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{2^{2k} k! (n+k)!} z^{2k}$ CV

$\Rightarrow \quad \forall z \in \mathbb{C}, \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{2^{2k} k! (n+k)!} z^{2k}$ CV

c/c $\quad R = +\infty$

Remarque importante

Des fois D'Alembert n'est pas applicable, que ça soit celui des SE ou celui des SATP.

On peut utiliser par exemples les réflexes vus ci-dessus.

voir l'exemple ci-après.

Exemple Déterminer le rayon de convergence de la SE

$$\sum_{n\geq 1} \sin(n) z^n.$$

Solution Notons $a_n = \sin(n)$.

On a $(a_n)_n$ est bornée, càd $(a_n . 1^n)_n$ bornée.

D'où $R \geq 1$

Montrons maintenant que $R \leq 1$.

D'après l'un des réflexes vus ci-dessus, il suffit de vérifier que la série $\sum_{n\geq 0} \sin(n).1^n$ diverge.

Ce qui est vrai, car $\sin(n) \underset{n\to+\infty}{\not\longrightarrow} 0$. (n'a même pas de limite)

Enfin : $R = 1$

4) Comparaison des rayons de convergences

Prop 1 Soient $\sum_n a_n z^n$ et $\sum_n b_n z^n$ deux SE de rayons de convergences respectifs R_a et R_b.

$$\text{Si } (\forall n \in \mathbb{N}, |a_n| \leq |b_n|) \text{ Alors } (R_a \geq R_b)$$

Démo On a : $(\forall n \in \mathbb{N}, |a_n z^n| \leq |b_n z^n|)$ (Ω)

Or : $(\forall |z| < R_b, \sum_n |b_n z^n| \text{ CV})$

Alors : $(\forall |z| < R_b, \sum_n |a_n z^n| \text{ CV})$; d'après (Ω)

$\Rightarrow (\forall |z| < R_b, \sum_n a_n z^n \text{ CV})$

D'où $R_a \geq R_b$

Corollaire 2

Soient $\sum_n a_n z^n$ et $\sum_n b_n z^n$ deux SE de rayon de convergences respectifs R_a et R_b.

1) Si $\left(|a_n| = O(|b_n|)\right)$ Alors $\left(R_a \geqslant R_b\right)$

2) Si $\left(|a_n| = o(|b_n|)\right)$ Alors $\left(R_a \geqslant R_b\right)$

3) Si $\left(|a_n| \sim |b_n|\right)$ Alors $\left(R_a = R_b\right)$

NB : Si $M \neq 0$, alors $\sum a_n z^n$ et $\sum M a_n z^n$ ont même RCV.

Démo du Coroll 2 (en bref)

1) $\left(\exists M > 0, \forall n \in \mathbb{N}, |a_n| \leq M |b_n|\right)$
$$\Rightarrow R_a \geqslant R_b$$

2) $|a_n| = o(|b_n|) \Rightarrow |a_n| = O(|b_n|)$
$$\overset{1°)}{\Longrightarrow} R_a \geqslant R_b$$

3) $|a_n| \sim |b_n| \Rightarrow \left(|a_n| = O(|b_n|) \text{ et } |b_n| = O(|a_n|)\right)$
$$\overset{(1)}{\Longrightarrow} R_a = R_b$$

Exemples express

Déterminer le RCV de chacune des SE suivantes :

1) $\sum_{n \geqslant 1} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) z^n$, 2) $\sum_{n \geqslant 0} \frac{2n^2 - 3n + 1}{n^3 + n^2 + 2} z^n$

Solution

1) $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$ et le RCV de $\sum \frac{z^n}{n}$ est $R = 1$ via D'Alembert.

D'où le RCV voulu est 1.

2) Pareil.

5) Rayon de Convergence de la série entière dérivée

Déf 1 La série entière dérivée de la SE $\sum_n a_n z^n$ est la SE $\sum_n n a_n z^n$.

Prop 2 : Une SE et sa SE dérivée ont le même RCV.

Corollaire 3

1) $\sum a_n z^n$ et $\sum \frac{a_n}{n} z^n$ ont le même rayon de Convergence.
2) $\forall k \in \mathbb{Z}$, $\sum a_n z^n$ et $\sum n^k a_n z^n$ ont le même ray de Conv.
3) $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\sum a_n z^n$ et $\sum n^\alpha a_n z^n$ ont le même ray de Conv.

Démo (En bref)

3) $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\sum a_n z^n$ et $\sum n^\alpha a_n z^n$ ont le même ray de Conv.

$$\underbrace{\lfloor \alpha \rfloor}_{\in \mathbb{Z}} \leq \alpha < \underbrace{\lfloor \alpha \rfloor + 1}_{\in \mathbb{Z}}$$

$$n^{\lfloor \alpha \rfloor} \leq n^\alpha \leq n^{\lfloor \alpha \rfloor + 1}$$

$$\underbrace{n^{\lfloor \alpha \rfloor} |a_n|} \leq \underbrace{n^\alpha |a_n|} \leq \underbrace{n^{\lfloor \alpha \rfloor + 1} . |a_n|}$$

le RCV de $\sum_n n^{\lfloor \alpha \rfloor \to \in \mathbb{Z}} a_n z^n$ = le RCV de $\sum a_n z^n = R$

le RCV de $\sum_n n^{\lfloor \alpha \rfloor + 1 \to \in \mathbb{Z}} a_n z^n$ = le RCV de $\sum a_n z^n = R$

$$R \geq \text{le RCV de } \sum n^\alpha a_n z^n \geq R$$

6) Somme et produit de deux SE

a) Somme de deux SE

Ici, $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux SE de RCV respectifs R_a et R_b.

Déf 1 La somme des SE $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ est la SE $\sum (a_n+b_n) z^n$.

Prop 2 Notons R_S le RCV de la SE somme $\sum (a_n+b_n) z^n$. On a :

1) $R_S \geq \min(R_a, R_b)$

2) $\forall\ |z| < \min(R_a, R_b)$, $\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n+b_n) z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$

Démo

$$|z| < \min(R_a, R_b) \iff (|z| < R_a \text{ et } |z| < R_b)$$

alors $\forall\ |z| < \min(R_a, R_b)$, $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ CV

$\Rightarrow \forall\ |z| < \min(R_a, R_b)$, $\sum (a_n+b_n) z^n$ converge comme somme de 2 SE convergentes.

Prop 3 Si $R_a \neq R_b$ alors $R_S = \min(R_a, R_b)$

b- Produit de Cauchy de 2 SE :

Déf 1 : Le produit de Cauchy des SE $\sum_{n\geq 0} a_n t^n$ et $\sum_{n\geq 0} b_n t^n$ est la SE $\sum_{n\geq 0} C_n t^n$ où :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ C_n=\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

Prop 2 : Soit $z\in\mathbb{C}$.

Le produit de Cauchy des séries complexes $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geq 0} b_n z^n$ est la série complexe $\sum_{n\geq 0} C_n z^n$

où : $C_n=\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$

Démo : Le produit de Cauchy des SE $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ est la SE $\sum w_n$ avec :

$$w_n=\sum_{k=0}^{n}(a_k z^k)\cdot(b_{n-k} z^{n-k})$$
$$=\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) z^n$$
$$=C_n z^n$$

Prop3 : $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ 2 SE de RCV respectifs R_a et R_b. Soit $\sum_n c_n z^n$ la série entière produit et R_p son RCV

1) $\forall |z| < \min(R_a, R_b)$, $\sum_{n\geq 0} c_n z^n$ ACV

et on a $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right)$

2) $R_p \geq \min(R_a, R_b)$

Démo : 1) Supp $|z| < \min(R_a, R_b)$ alors ($|z| < R_a$ et $|z| < R_b$

$\Rightarrow \sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ ACV

$\Rightarrow$ La série complexe produit de Cauchy est ACV

$\Rightarrow \sum_{n\geq 0} c_n z^n$ ACV

en plus, on a aussi : $\sum_0^{+\infty} c_n z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right)$

Ex d'applic

Soit $f : z \in \mathbb{C} \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) z^n$.

Justifier que f est définie sur $D(0, 1)$, et que :

$$\forall |z| < 1, \quad f(z) = \frac{1}{(1-z)^2}$$

Sol :

1) Justifier que f est définie sur $D(0, 1)$

Càd : $\forall |z| < 1$, $\sum_{n\geq 0} (n+1) z^n$ Converge.

Le RCV de la série entière $\sum_{n\geq 0} (n+1) z^n$ est $R = 1$, via D'Alembert.

D'où : $\forall |z| < 1$, $\sum_{n\geq 0} (n+1) z^n$ ACV

$\Rightarrow$ f définie sur $D(0, 1)$. $\square$

2) Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z|<1$.

M.que : $\forall |z|<1, \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)z^n = \frac{1}{(1-z)^2}$

$$\forall |z|<\min(R_a,R_b),\ \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right)\times\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) z^n$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)z^n$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} 1^k . 1^{n-k}\right) z^n$$

$\left\{\begin{array}{l} a_k = 1 \\ b_k = 1 \end{array}\right.$

$$= \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right)\times\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right)$$

(car $|z|<1$ et 1 le RCV de $\sum_n z^n$ et $\sum_n z^n$)

$$= \left(\sum_{n=0}^{+\infty} z^n\right)\times\left(\sum_{n=0}^{+\infty} z^n\right)$$

$$= \frac{1}{(1-z)^2}$$

$\square$

II) Propriété de la fct somme d'une SE :

Dans tout le paragraphe et sauf mention contraire, $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ sera une SE et $R>0$ son RCV.

$f : z \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ sera sa somme.

1) Continuité :

Prop 1 :

La série de fcts $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ CN sur tout disque fermé $\overline{D}(0,r)$ où $r<R$.

Démo

Soit $r<R$, où R le RCV de $\sum a_n z^n$.

M que la série de fonctions $\sum_n \underbrace{a_n z^n}_{\hookrightarrow f_n(z)}$ CN sur $\overline{D}(0,r)$.

Soient alors $n\in\mathbb{N}$ et $z\in\overline{D}(0,r)$.

On a $|f_n(z)| = |a_n z^n|$

$= |a_n|.|z|^n$

$\leq \underbrace{|a_n| r^n}_{\hookrightarrow \alpha_n}$ (car $|z|\leq r$)

Vérifions que la série numérique $\sum_{n\geq 0} \underbrace{|a_n| r^n}_{\alpha_n}$ converge.

On a que R le RCV de $\sum a_n z^n$

Alors $\forall |z|<R$, la série $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ est ACV

Or $|r|=r<R$ alors la série $\sum_n a_n r^n$ est ACV.

$\Rightarrow \sum |a_n r^n|$ CV

$\Rightarrow \sum_{n\geq 0} |a_n| r^n$ converge.

CQFD

Enfin On a la CNormale voulue $\square$

Prop 2 :

$f : z \longrightarrow \sum_0^{+\infty} a_n z^n$ est continue sur $D(0,R)$

Démo

Notons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(z) = a_n z^n$.

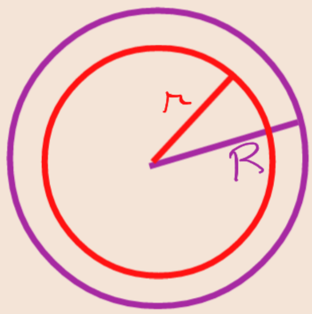
On a $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(z)$.

Soit $r < R$.

On a
1) $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $\overline{D}(0,r)$
2) $\sum_n f_n$ CN, donc CU, sur $\overline{D}(0,r)$

D'où f est continue sur $\overline{D}(0,r)$, et ce pour tout $r < R$.

Enfin, f est continue sur $D(0,R)$. $\square$



Corollaire 3

La fct $x \in \mathbb{R} \longmapsto \sum_0^{+\infty} a_n x^n$ est continue sur $]-R, R[$

2) Intégration terme à terme d'une SE :

Prop 1 :

Soit $R>0$ le RCV de la SE $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$. On a :

$$\forall x\in]-R,R[,\quad \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n\right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_0^x a_n t^n\, dt\right)$$

« intégration terme à terme d'une SE »

Démo

Soit $R>0$ le RCV de la SE $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$.

Soit $x\in]-R,R[$. M.que :

$$\int_0^x \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n\right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_0^x a_n t^n\, dt\right)$$

Cas 1 : Si $0<x<R$

On a
1) $\forall n\geq 0$, $t\mapsto a_n t^n$ continue sur $[0,x]$.
2) $\sum_{n\geq 0} a_n t^n$ CN, donc CU, sur $[0,x]$. (CN sur $\bar{D}(0,x)$ car $x<R$)

D'où
$$\int_0^x \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n\right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_0^x a_n t^n\, dt\right)$$

Cas 2 : Si $-R<x<0$

On a

1) $\forall n \geq 0$, $t \mapsto a_n t^n$ Continue sur $[x,0]$.

2) $\sum_{n\geq 0} a_n t^n$ CN, donc CU, sur $[x,0]$. $\left(\text{CN sur } \bar{D}(0,|x|) \text{ car } |x|<R\right)$

D'où
$$\int_x^0 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n\right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_x^0 a_n t^n \, dt\right)$$

$$\Longrightarrow \quad \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n\right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_0^x a_n t^n \, dt\right)$$

Cas 3 : Si $x=0$:

L'égalité est évidente ; ses deux membres sont nuls

Ex d'applic

M que :
$$\forall x \in]-1,1[, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$$

$$\forall x \in]-R,R[, \quad \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n\right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_0^x a_n t^n \, dt\right)$$

Rappel

Solution

Soit $x \in]-1,1[$. M.q. $-\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$.

On a :

$\forall x \in]-R,R[, \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n\right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_0^x a_n t^n dt\right)$ Rappel

$$-\ln(1-x) = \int_0^x \frac{1}{1-t} dt$$

$$= \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{+\infty} t^n\right) dt$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_0^x t^n dt\right) \quad \left(\text{car } x \in]-1,1[\text{ et } 1 \text{ le RCV de } \sum_{n\geq 0} t^n\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad \left(\left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^x = \frac{x^{n+1}}{n+1}\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}.$$

$\square$

3) Dérivation terme à terme dans une SE

Prop 1 : $R > 0$ le RCV de la SE $\sum a_n z^n$

La somme $f : x \longrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $]-R,R[$ et on a :

$$\forall x \in]-R,R[, \forall k \in \mathbb{N} \quad f^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n x^n)^{(k)}$$

Résumé

$\forall x \in]-R,R[, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \; ; \; f \in C^\infty(]-R,R[, \mathbb{K})$

$\forall x \in]-R,R[, \forall k \in \mathbb{N}, f^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n x^n)^{(k)}$

Corollaire 2

1) $\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in]-R,R[, \dfrac{f^{(k)}(x)}{k!} = \sum_{n=k}^{+\infty} C_n^k a_n x^{n-k}$

2) $\forall k \in \mathbb{N}, a_k = \dfrac{f^{(k)}(0)}{k!}$

Démo

1) Soit $k \in \mathbb{N}$. Soit $x \in]-R,R[$. On a :

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n x^n)^{(k)}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x^n)^{(k)} = ?$$

Rappels

Si $k \leq n$, $\boxed{(x^n)^{(k)} =} n \cdots (n-k+1) x^{n-k} = \boxed{\dfrac{n!}{(n-k)!} x^{n-k}}$

$(x^k)^{(k)} = k!$

$\boxed{\text{Si } k > n, (x^n)^{(k)} = 0}$

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x^n)^{(k)}$$

$$= \sum_{n=k}^{+\infty} a_n (x^n)^{(k)}$$

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} a_n \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k}$$

$$\frac{f^{(k)}(x)}{k!} = \sum_{n=k}^{+\infty} a_n \overbrace{\frac{n!}{(n-k)!\,k!}}^{= C_n^k} x^{n-k}$$

$$= \sum_{n=k}^{+\infty} C_n^k \, a_n \, x^{n-k}$$

2) $\frac{f^{(k)}(0)}{k!} = C_k^k \, a_k \cdot 1$ (Non pas o !)

$= a_k$

Prop 3 : Soient $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ 2 SE de RCV respectifs R_a et R_b et de sommes f et g.

1) Si $f = 0$ au voisinage de 0, alors $(\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = 0)$

2) Si $f = g$ au voisinage de 0, alors $(\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = b_n)$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Si } \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \underset{x\to 0}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n \quad \text{alors } (\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = b_n) \\[2em] \text{Si } \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \underset{x\to 0}{=} 0 \quad \text{alors } (\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = 0) \end{array}}$$

Résumé

Démo

1) On a :

$$\forall x \in]-R,R[, \ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \quad \text{et } f \in C^\infty(]-R,R[, \mathbb{K})$$

Supp. que $\displaystyle f(x) \underset{x\to 0}{=} 0$ et M.que $(\forall n \in \mathbb{N}, a_n = 0)$

On a : $\forall n \in \mathbb{N}, \ a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} 0 \implies \exists r>0, \forall x \in]-r,r[, f(x) = 0$$

$$\implies \forall x \in]-r,r[, \forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(x) = 0$$

$$\implies \forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(0) = 0$$

$$\implies \boxed{\forall n \in \mathbb{N}, a_n = 0}, \text{ car } a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

2) Vient de 1°)

A retenir Si f la somme de la SE $\sum_n a_n x^n$ de RCV $R>0$, on a : $\left(\forall x \in]-R,R[\ ; \ f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n\right)$

Vocab Soit f de C^∞ sur l'intervalle $]-r,r[$ où $(r>0)$

La série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ s'appelle la série de Taylor de la fct f.

III. Fonctions développables en série entière :

Rappel :

1) $\forall z \in \mathbb{C}, \sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}$ Acv et $e^z = \sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}$

2) $\forall |z|<1, \sum_{n\geq 0} z^n$ Acv et $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0} z^n$

1/ Définitions :

Déf 1 : Soit $r>0$: la fct f est dite développable en série entière (D.S.E) sur $]-r,r[$ si et ssi il existe une série entière $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ telle que

$$\forall x \in]-r,r[, \; f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

Déf 2 : f est dite développable en série entière en 0 (ou au voisinage de 0) si et ssi il existe $r>0$ tq que f soit D.S.E sur $]-r,r[$.

Vocab : L'expression "$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$" s'appelle "Le développement en série entière" de f. Noté aussi DSE.

Exemple 1 : $f : x \longrightarrow \frac{1}{1-x}$ est une fct DSE au voisinage de 0

et voici son DSE :

$$\forall x \in]-1,1[: \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$$

Question : Montrer que la fct $x \longmapsto \frac{1}{2-x}$ est DSE en 0 et préciser son DSE.

Réponse

$$\frac{1}{2-x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{x}{2}}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n \quad \left(\forall \left|\frac{x}{2}\right| < 1\right)$$

C/C $\left(\forall x \in]-2,2[\,;\ \frac{1}{2-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}} x^n\right)$

R/R1 : $x \longmapsto \frac{1}{2-x}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ mais DSE sur $]-2,2[$.

R/R2 : En général, pour tout $a \in \mathbb{R}^*$, on a :

$\forall x \in]-|a|, |a|[, \ \frac{1}{a-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{a^{n+1}} x^n$

Exemple 2 : exp est DSE en 0 (sur $\mathbb{R}$ entier), et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Question : Justifier que $x \mapsto \frac{1}{1+x}$, $x \mapsto \frac{1}{1-x^2}$ et $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ sont DSE en 0, et préciser leurs DSE.

Réponse :

1) $\forall x \in]-1,1[, \ \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$

2) $\forall x \in]-1,1[\ \ \frac{1}{1-x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n}$

3) $\forall x \in]-1,1[, \ \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}$

2) Propriétés

Prop 1 : Soit $r > 0$

1) La combinaison linéaire de 2 fcts DSE sur $]-r,r[$ est une fct DSE sur $]-r,r[$

2) Le produit de 2 fcts DSE sur $]-r,r[$ est une fct DSE sur $]-r,r[$

On a précisément :

Si $\begin{cases} \forall x \in]-r,r[\,,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\ \forall x \in]-r,r[\,,\ g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n \end{cases}$

Alors $\begin{cases} 1/\ \forall x \in]-r,r[\,;\ \alpha f(x) + \beta g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) x^n \\ 2/\ \forall x \in]-r,r[\,,\ f(x)\cdot g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} C_n x^n \\ \text{où} \quad C_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \end{cases}$

Corollaire 02 :

1/ La combin lin de 2 fcts DSE en 0 est une fct DSE en 0

2/ Le produit de 2 fcts DSE en 0 est une fct DSE en 0.

Démo :

Soient f et g deux fonctions DSE en 0.

1) M.q. $(\alpha f + \beta g)$ est DSE en 0. (En bref)

f DSE en 0 $\Rightarrow \left(\forall x \in]-r_1, r_1[\,,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right)$

g DSE en 0 $\Rightarrow \left(\forall x \in]-r_2, r_2[\,,\ g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n\right)$

Notons $r = \min(r_1, r_2)$. On a

$$\begin{cases} \forall x \in]-r, r[, \; f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\ \forall x \in]-r, r[, \; g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \forall x \in]-r, r[, \; \alpha f(x) + \beta g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) x^n$$

D'où $\boxed{(\alpha f + \beta g) \text{ est DSE en } 0.}$ □

2) Idem pour fg.

Exemple

Justifier que ch et sh sont DSE sur $\mathbb{R}$, et déterminer leurs DSE.

Solution

On a : $$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, \; ch(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} \\ \forall x \in \mathbb{R}, \; sh(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} \end{cases}$$

ch et sh sont ainsi Combinaisons Linéaires de

$x \longmapsto e^x$ et $x \longmapsto e^{-x}$ qui sont DSE sur $\mathbb{R}$.

D'où $\boxed{\text{Ch et Sh sont DSE sur } \mathbb{R}}$.

□

Déterminons leurs DSE

On a $\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, \ e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \\ \forall x \in \mathbb{R}, \ e^{-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!} \end{cases}$

$$\Longrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \ \begin{cases} ch(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1+(-1)^n}{2\, n!} x^n \\ sh(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1-(-1)^n}{2\, n!} x^n \end{cases}$$

D'où
$$\boxed{\begin{array}{l} \forall x \in \mathbb{R}, \ ch(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \\ \forall x \in \mathbb{R}, \ sh(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \end{array}}$$

Prop3 : Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ et $r > 0$.

Supp que f est DSE sur $]-r, r[$ et que

$$\forall x \in]-r, r[, \ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

1) $Re(f)$ et $Im(f)$ sont DSE sur $]-r, r[$ et que

2) $\begin{cases} \forall x \in]-r, r[, \ Re(f(x)) = \sum_{n=0}^{+\infty} Re(a_n) x^n \\ \forall x \in]-r, r[, \ Im(f(x)) = \sum_{n=0}^{+\infty} Im(a_n) x^n \end{cases}$

Exercice d'application

Mq que cos et sin sont DSE sur $\mathbb{R}$ et déterminer Leurs DSE.

Solution

$x \longmapsto e^{ix}$ est DSE sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ e^{ix} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{i^n}{n!} x^n$$

Donc $Re(e^{ix}) = \cos x$ et $Im(e^{ix}) = \sin x$ sont DSE sur $\mathbb{R}$.

Déterminons Les DSE de cos et sin :

On a $\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} ; \ \cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} Re\left(\frac{i^n}{n!}\right) x^n \\ \forall x \in \mathbb{R} ; \ \sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} Im\left(\frac{i^n}{n!}\right) x^n \end{cases}$ (1)

Or $\begin{cases} \frac{i^{2n}}{(2n)!} = \frac{(-1)^n}{(2n)!} \\ \frac{i^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} i \end{cases}$

Alors $\begin{cases} Re\left(\frac{i^{2n}}{(2n)!}\right) = \frac{(-1)^n}{(2n)!} \text{ et } Im\left(\frac{i^{2n}}{(2n)!}\right) = 0 \\ Re\left(\frac{i^{2n+1}}{(2n+1)!}\right) = 0 \text{ et } Im\left(\frac{i^{2n+1}}{(2n+1)!}\right) = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \end{cases}$

En injectant dans (Ω) on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R} \ ; \ \begin{cases} \cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} \\ \sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \end{cases}$$

Prop 4 (Intégration et dérivation terme à terme d'une fct DSE)

Soit $r > 0$ et soit f une fct DSE sur $]-r,r[$ avec

$$\forall t \in]-r,r[\ , \ f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$$

1/ $\forall x \in]-r,r[\ , \ \int_0^x f(t)\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_0^x a_n t^n \,dt \right)$

2/ f' est aussi DSE sur $]-r,r[$, et on a :

$$\forall x \in]-r,r[\ , \ f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$$

3/ $\forall k \in \mathbb{N}$, $f^{(k)}$ est DSE sur $]-r,r[$, et on a :

$$\forall x \in]-r,r[\ , \ f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} a_n k! C_n^k x^{n-k}$$

Exercice d'application

1)- Justifier que $\frac{1}{(1-x)^2}$ est DSE en 0, déterminer son DSE.

2)- De même pour $x \longmapsto \frac{1}{(1-x)^n}$, où $n \geq 2$ fixé.

3)- " " " $x \longmapsto \arctan(x)$.

4)- " " " $x \longmapsto \operatorname{argth}(x)$.

Solution

1/ $\frac{1}{(1-x)^2} = \left(\frac{1}{1-x}\right)'$ et $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ est DSE en 0 car :

$$\left(\forall x \in]-1,1[,\ \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right)$$

D'où sa dérivée $x \longmapsto \frac{1}{(1-x)^2}$ est DSE en 0, et qu'on a :

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[,\ \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) x^n}$$

« déjà trouvé via le prod de Cauchy de 2 SE »

2/ $$\frac{1}{(1-x)^n} = \left(\frac{1}{1-x}\right)^{(n-1)} \times \frac{1}{(n-1)!}$$

Vu : $$\boxed{\left(\frac{1}{(1-x)}\right)^{(p)} = \frac{p!}{(1-x)^{p+1}}}$$

$$\left(\frac{1}{(1-x)}\right)^{(p)} = \left((1-x)^{-1}\right)^{(p)} = 1.2\ldots p.(1-x)^{-(p+1)} = \frac{p!}{(1-x)^{p+1}}$$

$$\left((1-x)^{-1}\right)^{(1)} = (+1)(1-x)^{-2} \ ; \ \left((1-x)^{-1}\right)^{(2)} = (+1).(+2)(1-x)^{-3}$$

Brouillon

Or $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ est DSE en 0 car :

$$\left(\forall x \in]-1,1[,\ \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right)$$

D'où $x \mapsto \frac{1}{(1-x)^n} = \left(\frac{1}{1-x}\right)^{(n-1)} \times \frac{1}{(n-1)!}$ est DSE en 0

et que pour tout $x \in]-1,1[$, on a :

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)^{(n-1)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(x^k\right)^{(n-1)}$$

$$= \sum_{k=n-1}^{+\infty} \left(x^k\right)^{(n-1)}$$

Car $n-1 > k \Rightarrow \left(x^k\right)^{(n-1)} = 0$

$$= \sum_{k=n-1}^{+\infty} \frac{k!}{(k-n+1)!} x^{k-n+1}$$

D'où le DSE sur $]-1,1[$ de $\frac{1}{(1-x)^n} = \sum^{+\infty} \frac{k!}{(n-1)!\,(k-n+1)!}$

$$\left(x^k\right)^{(i)} = \frac{k!}{(k-i)!} x^{k-i}$$

Ainsi :

$$\forall x \in]-1,1[,\ \frac{1}{(1-x)^n} = \sum_{k=n-1}^{+\infty} \frac{k!}{(n-1)!\,\big(k-(n-1)\big)!} x^{k-n+1}$$

$$= \sum_{k=n-1}^{+\infty} C_k^{n-1} x^{k-(n-1)}$$

$$= \sum_{k=n-1}^{+\infty} C_k^{k-(n-1)} x^{k-(n-1)}$$

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[, \quad \frac{1}{(1-x)^n} = \sum_{i=0}^{+\infty} C_{i+n-1}^{i} x^{i}} \quad \left(\begin{array}{c}\text{via} \\ i = k-(n-1)\end{array}\right)$$

3/- Pour Arctan x :

Notons que : $\left(\forall x \in \mathbb{R}, \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}\right)$

Soit : $\left(\forall x \in \mathbb{R}, \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt = \arctan x\right)$

Or : $\left(\forall t \in]-1,1[, \frac{1}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^{2n}\right)$

Alors puisque $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ est DSE sur $]-1,1[$, on tire

que $x \mapsto \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt = \arctan x$ est DSE sur $]-1,1[$.

Et on a :

$$\forall x \in]-1,1[, \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_0^x (-1)^n t^{2n}\,dt\right)$$

Enfin :

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[, \ \arctan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}}$$

4) Pour argth x

Notons que : $\left(\forall x \in]-1,1[, \ \operatorname{argth}'(x) = \frac{1}{1-x^2}\right)$

Soit : $\left(\forall x \in]-1,1[, \ \int_0^x \frac{1}{1-t^2}\,dt = \operatorname{argth}(x)\right)$

Or : $\left(\forall t \in]-1,1[, \ \frac{1}{1-t^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^{2n}\right)$

Alors puisque $t \mapsto \frac{1}{1-t^2}$ est DSE sur $]-1,1[$, on tire

que $x \mapsto \int_0^x \frac{1}{1-t^2}\,dt = \operatorname{argth}(x)$ est DSE sur $]-1,1[$.

Et on a :

$$\forall x \in]-1,1[, \ \int_0^x \frac{1}{1-t^2}\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_0^x t^{2n}\,dt\right)$$

Enfin :

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[, \ \operatorname{argth}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}}$$

Prop

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

La fonction $x \longmapsto (1+x)^{\alpha}$ est DSE sur $]-1,1[$

et on a :

$$\forall x \in]-1,1[, \ (1+x)^{\alpha} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\prod_{k=0}^{n-1} (\alpha - k) \right) \frac{x^n}{n!}$$

DSE usuels

(À retenir !)

$$\forall x \in]-1,1[, \quad \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$$

$$\forall x \in]-1,1[, \quad -\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$$

$$\forall x \in]-1,1[, \quad \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n\pm 1} \frac{x^n}{n}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{ch}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{sh}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{Cos}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{Sin}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\forall x \in]-1,1[, \quad \mathrm{artan}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$\forall x \in]-1,1[\,,\ \operatorname{argth}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$\forall x \in]-1,1[\,,\quad (1+x)^{\alpha} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\prod_{k=0}^{n-1} (\alpha - k) \right) \frac{x^n}{n!}$$

où $\alpha \in \mathbb{R}$.

FIN