Concours National Commun
Corrigé de l'épreuve de Mathématiques 2
Session 2023 - Filière MP

m.laamoum@gmail.com [1]

Exercice

Probabilité qu'une matrice soit diagonalisable

1.1. Étude de la diagonalisabilité d'une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

On considère $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ et on pose $A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$.

1.1.1. Si $\alpha \neq \beta$, alors A admet deux valeurs propres distincte donc elle est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1.1.2. Si $\alpha = \beta$ et A est diagonalisable alors elle est semblable à αI_3 par suite elle égale à αI_3 ce qui est absurde donc A n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1.2. Calcul de la probabilité qu'une matrice aléatoire soit diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

1.2.1. $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p_1)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X = k) = q_1^{k-1} p_1$, avec $q_1 = 1 - p_1$.

1.2.2. On a $X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$ donc $U(\Omega) = \{k + h \mid k, h \in \mathbb{N}^*\} = \mathbb{N}\backslash\{0, 1\}$.

$\rightarrow$ Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0, 1\}$ on a

$$\mathbb{P}(U = n) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(\,[X = k] \cap [Y = n - k])$$

X et Y ne prennent pas la valeur 0 donc

$$\mathbb{P}(U = n) = \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(\,[X = k] \cap [Y = n - k])$$

et les deux variables sont indépendantes

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(U &= n) = \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(X = k)\ \mathbb{P}(Y = n - k) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} q_1^{k-1} p_1\ q_2^{n-k-1} p_2 \quad (\ \textit{avec } q_1 = 1 - p_1\ ,\ q_2 = 1 - p_2) \\ &= p_1 p_2 q_2^{n-2} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{q_1}{q_2}\right)^{k-1} \quad (q_2^{n-k-1} = q_2^{n-2+(k-1)}) \end{aligned}$$

si $\dfrac{q_1}{q_2} = 1$ alors $p_1 = p_2$ et $\mathbb{P}(U = n) = (n-1)\ p_1^2 q_1^{n-2}$ et si $\dfrac{q_1}{q_2} \neq 1$ alors

$$\mathbb{P}(U = n) = p_1 p_2 q_2^{n-2} \frac{1 - \left(\frac{q_1}{q_2}\right)^{n-1}}{1 - \frac{q_1}{q_2}} = p_1 p_2 \frac{q_1^{n-1} - q_2^{n-1}}{q_2 - q_1}$$

Ainsi

$$\boxed{\mathbb{P}(U = n) = \begin{cases} (n-1)\ p_1^2 q_1^{n-2} & \text{si } p_1 = p_2 \\ p_1 p_2 \dfrac{q_1^{n-1} - q_2^{n-1}}{q_2 - q_1} & \text{si } p_1 \neq p_2 \end{cases}}$$

$\rightarrow$ Deuxième méthode **:** On calcul la fonction génératrice $G_U(t) = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} \mathbb{P}(U = n) t^n$ pour tout $t \in\,]-1, 1[$.

Les variables X et Y sont indépendantes donc pour tout $t \in\,]-1, 1[$ on a $G_{X+Y}(t) = G_X(t) G_Y(t)$, le

1. https://tinyurl.com/2qyzzrbd

théorème du produit de Cauchy des séries entières donne le résultat.
Rappelons que $G_X(t) = \dfrac{p_1 t}{1-q_1 t}$, $G_y(t) = \dfrac{p_2 t}{1-q_2 t}$.

1.2.3. $V = \min(X,Y)$. On a $V(\Omega) = \mathbb{N}^*$, et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a

$$[V > k] = [X > k] \cap [Y > k]$$

donc $\mathbb{P}(V > k) = \mathbb{P}(X > k, Y > k) = \mathbb{P}(X > k)\mathbb{P}(Y > k)$ *(car X et Y sont indépendantes)* .
De plus

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X > k) &= \sum_{n=k+1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n) \\ &= \sum_{n=k+1}^{+\infty} p_1 q_1^{n-1} \quad (q_1 = 1 - p_1) \\ &= \frac{p_1 q_1^k}{1-q_1} \\ &= q_1^k \end{aligned}$$

de même $\mathbb{P}(Y > k) = q_2^k$, par suite $\boxed{\mathbb{P}(V > k) = (q_1 q_2)^k}$.
Et on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(V = k) &= \sum_{n=k}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n) - \sum_{n=k+1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n) \\ &= \mathbb{P}(V > k-1) - V(V > k) \\ &= (q_1 q_2)^{k-1} - (q_1 q_2)^k \end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{\mathbb{P}(V = k) = (q_1 q_2)^{k-1} (1 - q_1 q_2)}$ et V suit la loi $\mathcal{G}(1 - q_1 q_2)$.

1.2.4. La famille $([X = n])_{n \in \mathbb{N}^*}$ est un système complet d'événements donc

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X < Y) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X < Y] \cap [X = n]) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}([Y > n] \cap [X = n]) \end{aligned}$$

et on a $[Y > n] \cap [X = n] = \displaystyle\bigcup_{k=n+1}^{+\infty} [Y = k] \cap [X = n]$, c'et une réunion disjointe donc

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([Y > n] \cap [X = n]) &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} \mathbb{P}([Y = k] \cap [X = n]) \\ &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} \mathbb{P}(Y = k).\mathbb{P}(X = n) \quad (\textit{ X et Y sont indépendantes }) \\ &= p_1 p_2 q_1^{n-1} \sum_{k=n+1}^{+\infty} q_2^{k-1} \\ &= p_1 p_2 q_1^{n-1} \frac{q_2^n}{1-q_2} \\ &= p_1 q_1^{n-1} q_2^n \end{aligned}$$

par suite

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X < Y) &= \sum_{n=1}^{+\infty} p_1 q_1^{n-1} q_2^n \\ &= \frac{p_1 q_2}{1 - q_1 q_2} \end{aligned}$$

qui s'écrit aussi $\boxed{\mathbb{P}(X < Y) = \dfrac{p_1(1-p_2)}{p_1 + p_2 - p_1 p_2}}$.

1.2.5. Soit D l'événement « M est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ » , d'après la question 1.1 on a $D = [X \neq Y]$ et il s'ecrit

$$D = [X > Y] \cup [X < Y]$$

les deux événements sont disjoint donc

$$\mathbb{P}(D) = \mathbb{P}(X > Y) + \mathbb{P}(X < Y)$$

d'après 1.2.4 on a

$$\boxed{\mathbb{P}(D) = \frac{p_1 q_2 + p_2 q_1}{1 - q_1 q_2}}$$

Problème

Calcul de la distance d'une matrice de $\mathcal{M}_n(R)$ au groupe orthogonal euclidien $\mathcal{O}_n(R)$

1ère Partie

Quelques résultats préliminaires

1.1. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a ${}^t(\,{}^tMM) = {}^tMM$, donc ${}^tMM$ est symétrique et pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

$${}^tX\ \left({}^tMM\right) X = {}^t(MX)\,(MX) = \|MX\|^2 \geqslant 0 \quad (\|X\|^2 = \langle X, X \rangle)$$

D'où ${}^tMM$ est symétrique et positive .

1.2. Soit $D = \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, à termes positifs.

1.2.1. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de composantes $x_1, \ldots, x_n$.
On a

$$DX = \begin{pmatrix} d_1 x_1 \\ \vdots \\ d_n x_n \end{pmatrix}$$

donc $\boxed{{}^tXDX = \sum_{i=1}^{n} d_i x_i^2}$.

1.2.2. $d_1, \ldots, d_n$ sont positifs donc ${}^tXDX = \sum_{i=1}^{n} d_i x_i^2 \geq 0$ pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ainsi D est une matrice symétrique positive.

1.3. Caractérisation de la positivité d'une matrice symétrique par le signe de ses valeurs propres

1.3.1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique et positive, d'après le théorème spectral le spectre de A est non vide et inclus dans $\mathbb{R}$.
Soit λ une valeur propre de A et X un vecteur propre A associé à λ, on a $X \neq 0$ et

$$\begin{aligned} {}^tXAX &= {}^tX\,(AX) \\ &= \lambda\left({}^tXX\right) \end{aligned}$$

comme ${}^tXAX \geq 0$ et ${}^tXX = \|X\|^2 > 0$ alors $\lambda \geq 0$.

1.3.2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique.

i) D'après le théorème spectral, A est diagonalisable et ses vecteurs propres forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$, par suite il existe une matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et une matrice orthogonale $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telles que ${}^tP.D.P = A$.

ii) Supposons que $Sp(A) = \{\lambda_1, ..., \lambda_n\} \subset \mathbb{R}^+$, on a ${}^tP.D.P = A$ avec $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, qui est positive , donc pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

$$ {}^tX.A.X = {}^tX\,.{}^tP.D.P.X = {}^t(PX).D.(PX) \geq 0 $$

A est une matrice symétrique positive .

1.4. Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. D'après 1.1 ${}^tBB$ est une matrice symétrique positive et d'après 1.3 il existe une matrice diagonale $\Delta \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, à termes positifs, et une matrice orthogonale $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telles que ${}^tB.B = P\Delta{}^tP$, alors ${}^tP\left({}^tBB\right)P = \Delta$.

1.5. Produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

On a pour tout $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

$$ \varphi(A, B) = \operatorname{Tr}\left({}^t\mathrm{AB}\right) = \operatorname{Tr}\left({}^t\left({}^t\mathrm{AB}\right)\right) = \operatorname{Tr}\left(A{}^tB\right) = \operatorname{Tr}\left({}^tBA\right) = \varphi(B, A) $$

Donc φ est symétrique, et

$$ \varphi(A + \lambda B, C) = \operatorname{Tr}\left({}^t(A + \lambda B)C\right) = \operatorname{Tr}\left({}^tAC\right) + \lambda \operatorname{Tr}\left({}^tBC\right) = \varphi(A, C) + \lambda\varphi(B, C) $$

Par symétrie, φ est bilinéaire, on vérifie que

$$ \varphi(A, A) = \operatorname{Tr}\left({}^tAA\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}^2 \geqslant 0 $$

par suite $\varphi(A, A) = 0$ si et seulement si $a_{i,j} = 0$ pour tout $i, j \in [\![1, n]\!]^2$ si et seulement si $A = 0$. Ainsi φ est positif et définie. D'où φ est un produit scalaire .

2$^{\text{ème}}$ Partie

Décomposition polaire d'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

2.1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$; on note $A_1, A_2, \ldots, A_n$ les matrices de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ qui forment les colonnes de A et on suppose qu'il existe une matrice diagonale $D = \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, à termes positifs, telle que ${}^tAA = D^2$.

2.1.1. Posons $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq n}}$ et ${}^tA = (b_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq n}}$ avec $b_{i,j} = a_{j,i}$, on a ${}^tAA = (c_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq n}}$ avec

$$ c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} b_{i,k}a_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{k,i}a_{k,j} $$

et

$$ \sum_{k=1}^{n} a_{k,i}a_{k,j} = (a_{1,i}, ..., a_{n,i})\begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{pmatrix} = {}^tA_iA_j $$

donc $c_{i,j} = {}^tA_iA_j$.

Puis que ${}^tAA = (c_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq n}} = D^2$ alors $\boxed{{}^tA_iA_j = \begin{cases} d_i^2 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ si } i \neq j \end{cases}}$.

Si $d_i = 0$ alors ${}^tA_iA_j = 0$ pour tout j en particulier pour $i = j$, donc ${}^tA_iA_i = \|A_i\|^2 = 0$ d'où $A_i = 0$.

2.1.2. Soit $I = \{i \in [\![1,n]\!] \mid d_i \neq 0\}$.

Si $I = \emptyset$ alors $A = 0$ et toute base orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ convient .

Si $I \neq \emptyset$, posons $E_i = \frac{1}{d_i} A_i$ pour tout $i \in I$, on a alors $\langle E_i, E_j \rangle = {}^tE_i E_j = \begin{cases} d_i^2 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ si } i \neq j \end{cases}$ et la famille $(E_i)_{i \in I}$ est orthonormée , on la complète en une base, $(E_1, \dots, E_n)$ orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et on a pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $A_i = d_i E_i$.

2.1.3. Soit E la matrice dont la j ieme colonne est E_j , ainsi E est une matrice orthogonale .

Posons $E = (b_{i,j})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}}$, $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}}$ et $D = (D_{i,j})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}}$, comme $A_j = d_j E_j$ pour tout $j \in [\![1,n]\!]$ alors :

$$a_{i,j} = d_j b_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} b_{i,k} D_{k,j}$$

par suite $\boxed{A = ED}$.

2.2. Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2.2.1. D'après 1.1 ${}^tBB$ est une matrice symétrique positive et d'après 1.3 il existe une matrice diagonale $\Delta = diag(\lambda_1, ..., \lambda_n)$, à termes positifs, et une matrice orthogonale $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telles que ${}^tP\,({}^tBB)\,P = \Delta$, posons $D = diag(\sqrt{\lambda_1}, ..., \sqrt{\lambda_n})$, alors $\Delta = D^2$ et $\boxed{{}^tP.{}^tBB.P = D^2}$.

2.2.2. On a ${}^tP.{}^tBB.P = {}^t(BP).(BP) = D^2$, d'après 2.1.3 il existe une matrice $E \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $BP = ED$. Par suite $BP = E{}^tP.PD$ et $B = (E{}^tP)\ (P.D.{}^tP)$, posons

$$\boxed{O = E{}^tP \text{ et } S = P.D.{}^tP}$$

Donc $B = OS$ et on a E , P sont orthogonaux donc O est orthogonale , D est diagonale à termes positifs donc S symétrique positive.

2.3. Application

On a $C = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $A = {}^tCC = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 5 \\ 5 & 6 & 5 \\ 5 & 5 & 6 \end{pmatrix}$.

$\rightarrow$ Diagonalisation de $A = {}^tCC$:

- Valeurs propres de A :

$$\begin{aligned}
\chi_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} \lambda-6 & -5 & -5 \\ -5 & \lambda-6 & -5 \\ -5 & -5 & \lambda-6 \end{vmatrix} \\
&\overset{C_1 \leftarrow C_1+C_2+C_3}{=} \begin{vmatrix} \lambda-16 & -5 & -5 \\ \lambda-16 & \lambda-6 & -5 \\ \lambda-16 & -5 & \lambda-6 \end{vmatrix} \\
&\overset{\substack{L_2 \leftarrow L_2-L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3-L_1}}{=} \begin{vmatrix} \lambda-16 & -5 & -5 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} \\
&= (\lambda-16)(\lambda-1)^2
\end{aligned}$$

donc $Sp(A) = \{1, 16\}$.

- Base orthonormée de vecteurs propres de A :

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1(A) \Leftrightarrow x + y + z = 0$$

soit $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \in E_1(A)$ et $X_2 \in E_1(A)$ orthogonale à X_1 .

Donc $X_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ -x-y \end{pmatrix}$ et $\langle X_1, X_2 \rangle = 0$ par suite $x = y$ et $X_2 = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, prenons par exemple $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Une base orthonormée de $E_1(A)$ est donnée par :

$$V_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} , V_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

On a $E_{16}(A) = (E_1(A))^{\perp}$, il est donc engendré par $V_3 = V_1 \wedge V_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Donc $A = \ P\Delta^t P$ avec $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$ et $\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$

Par suite $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ et $E = CPD^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 & -\frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}$.

Ainsi

$$\boxed{O = EP = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } S = P.D.^tP = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}}$$

3ème Partie

Application à un calcul de distance

3.1.

3.1.1. L'application $M \longmapsto {}^tM$ est linéaire en dimensions finies donc elle est continue.

3.1.2. Posons $f : M \longmapsto {}^tMM$. Soit

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & ({}^tM, M) \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rcl} \psi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ (A, B) & \mapsto & A.B \end{array}$$

on a $f = \psi \circ \varphi$, φ est linéaire en dimensions finies donc elle est continue et ψ est bilinéaire en dimensions finies donc elle est continue, ainsi f est continue.

3.1.3. On a

$$\begin{aligned}\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) &= \left\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R});\ {}^tMM = I_n\right\}\\ &= \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R});\ f(M) = I_n\}\\ &= f^{-1}(\{I_n\})\end{aligned}$$

$\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est l'image reciproque la partie férmée $\{I_n\}$ par une application continue donc c'est une partie fermée.

De plus pour tout M dans $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ on a $\|M\|_2 = \sqrt{\mathrm{Tr}({}^tMM)} = \sqrt{\mathrm{Tr}(I_n)} = \sqrt{n}$, donc $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est bornée .

3.2. On est en dimension finie donc $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un compact et l'application $M \mapsto A - M$ est continue *(elle est somme d'une application constante et une application linéaire)* , donc elle est bornée et atteint ses bornes sur $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, ainsi la borne inférieure existe et elle est atteinte.

3.3. Soit $\Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ on a

$$\begin{aligned}\|\Omega A\|_2^2 &= \mathrm{Tr}({}^t(\Omega A)\,(\Omega A))\\ &= \mathrm{Tr}({}^tA.{}^t\Omega.\Omega.A) \quad ({}^t\Omega.\Omega = I_n)\\ &= \mathrm{Tr}({}^tA.A)\\ &= \|A\|_2^2\end{aligned}$$

d'où $\|\Omega A\|_2 = \|A\|_2$.

De même

$$\begin{aligned}\|A\Omega\|_2^2 &= \mathrm{Tr}({}^t(A\Omega)\,(A\Omega))\\ &= \mathrm{Tr}((A\Omega)^t\,(A\Omega))\\ &= \mathrm{Tr}(A.\Omega.{}^t\Omega.{}^tA) \quad (\Omega.{}^t\Omega = I_n)\\ &= \mathrm{Tr}(A.{}^tA)\\ &= \mathrm{Tr}({}^tA.A)\\ &= \|A\|_2^2\end{aligned}$$

d'où $\|A\Omega\|_2 = \|A\|_2$.

3.4. Soient $O \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique et positive telles que $A = OS$.

3.4.1. Soit $\Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$,en déduire que $d\left(A, \mathcal{O}_n(\mathbb{R})\right) = d\left(S, \mathcal{O}_n(\mathbb{R})\right)$

On a

$$\|A - \Omega\|_2^2 = \|OS - \Omega\|_2^2 = \left\|O\left(S - O^{-1}\Omega\right)\right\|_2^2$$

$O \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ donc $\left\|O\left(S - O^{-1}\Omega\right)\right\|_2^2 = \left\|S - O^{-1}\Omega\right\|_2^2$ par suite

$$\|A - \Omega\|_2 = \left\|S - O^{-1}\Omega\right\|_2$$

Ainsi

$$d\left(A, \mathcal{O}_n(\mathbb{R})\right) = \inf_{M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})} \|A - M\|_2 = \inf_{M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})} \left\|S - O^{-1}M\right\|_2$$

Comme $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est un groupe, alors $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) = \left\{O^{-1}M, M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})\right\}$, d'où

$$\boxed{d\left(A, \mathcal{O}_n(\mathbb{R})\right) = \inf_{M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})} \|S - M\|_2 = d\left(S, \mathcal{O}_n(\mathbb{R})\right)}$$

3.4.2. S est une matrice symétrique réelle , d'après le théorème spectral elle est diagonalisable , donc il existe D une matrice diagonale et P une matrice orthogonale telles que $S = PDP^{-1}$.

Et on a

$$\begin{aligned} d\left(A, \mathcal{O}_n(\mathbb{R})\right) &= d\left(S, \mathcal{O}_n(\mathbb{R})\right) \\ &= \inf_{M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})} \|S - M\|_2 \\ &= \inf_{M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})} \left\|PDP^{-1} - M\right\|_2 \\ &= \inf_{M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})} \left\|D - P^{-1}MP\right\|_2 \quad \textit{(d'après 3.3)} \\ &= \inf_{M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})} \|D - M\|_2 \quad \left(\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) = \left\{P^{-1}MP, M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})\right\}\right) \end{aligned}$$

d'où $\boxed{d\left(A, \mathcal{O}_n(\mathbb{R})\right) = d\left(D, \mathcal{O}_n(\mathbb{R})\right)}$.

3.5. On pose $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.

3.5.1. S est une matrice symétrique positive, donc d'après la question 1.3.1, on a $\lambda_1 \geqslant 0, \ldots, \lambda_n \geqslant 0$.

3.5.2. Soit $\Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, posons $D = \Delta^2$ avec $\Delta = diag(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n})$ on a

$$\operatorname{Tr}(D\Omega) = \langle \Delta, \Delta\Omega \rangle$$

l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

$$\operatorname{Tr}(D\Omega) \leq \|\Delta\|_2 \|\Delta\Omega\|_2 \ .$$

d'après 3.3 $\|\Delta\Omega\|_2 = \|\Delta\|_2$ donc

$$\boxed{\operatorname{Tr}(D\Omega) \leq \|\Delta\|_2^2 = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \ .}$$

3.5.3. Soit $\Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, on a

$$\begin{aligned} \|D - \Omega\|_2^2 &= \operatorname{Tr}\left({}^t(D - \Omega)(D - \Omega)\right) \\ &= \operatorname{Tr}\left({}^tDD\right) - \operatorname{Tr}\left({}^tD\Omega\right) - \operatorname{Tr}\left({}^t\Omega D\right) + \operatorname{Tr}\left({}^t\Omega\Omega\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2 - 2\operatorname{Tr}(\Omega D) + \operatorname{Tr}(I_n) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2 - 2\operatorname{Tr}(\Omega D) + n \end{aligned}$$

3.5.4. D'après la question précédente , on a

$$\begin{aligned} d\left(D, \mathcal{O}_n(\mathbb{R})\right) &= \inf_{\Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})} \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2 - 2\operatorname{Tr}(\Omega D) + n\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2 + n + 2 \inf_{\Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})} \left(-\operatorname{Tr}(\Omega D)\right) \end{aligned}$$

remarquons que $\inf_{\Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})} \left(-\operatorname{Tr}(\Omega D)\right) = \sup_{\Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})} \operatorname{Tr}(\Omega D)$ donc

$$d\left(D, \mathcal{O}_n(\mathbb{R})\right) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2 + n + 2 \sup_{\Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})} \operatorname{Tr}(\Omega D)$$

De la question 3.5.2 on a pour tout $\Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ $\operatorname{Tr}(D\Omega) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \lambda_k$, avec égalité pour $\Omega = I_n$ donc $\boxed{\sup_{\Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})} \operatorname{Tr}(\Omega D) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k}$.

Par suite

$$\begin{aligned} d\left(D, \mathcal{O}_n(\mathbb{R})\right) &= \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2 + n - 2\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left(\lambda_k - 1\right)^2 \end{aligned}$$

écrivons

$$\sum_{k=1}^{n} (\lambda_k - 1)^2 = \operatorname{Tr}\left({}^t(D - I_n)(D - I_n)\right) = \|D - I_n\|_2^2$$

donc $\boxed{d(A, \mathcal{O}_n(\mathbb{R})) = \|D - I_n\|_2^2}$.

Par suite

$$\begin{aligned} d(A, \mathcal{O}_n(\mathbb{R})) &= d(D, \mathcal{O}_n(\mathbb{R})) \\ &= \|D - I_n\|_2^2 \\ &= \left\|P^{-1}(D - I_n)P\right\|_2^2 \\ &= \|S - I_n\|_2^2 \\ &= \|SO - O\|_2^2 \\ &= \|A - O\|_2^2 \end{aligned}$$

d'où $\boxed{d(A, \mathcal{O}_n(\mathbb{R})) = \|A - O\|_2}$.

3.6. Application : $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

On a d'après la question 2.3 $-C = OS$ (!!!) avec

$$O = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad S = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

donc $C = (-O)S$, d'après 3.5.4, $d(C, \mathcal{O}_n(\mathbb{R})) = \|C + O\|_2$, ce qui donne

$$C + O = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } {}^t(C + O)(C + O) = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -3 \\ -3 & 3 & 3 \\ -3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

d'où $\boxed{d(C, \mathcal{O}_n(\mathbb{R})) = 3}$.

• • •FIN • • •