

SÉRIES NUMÉRIQUES

Exercice 1 :

Déterminer la nature de la série $\sum_n u_n$ dans chacun des cas suivants :

$$\begin{array}{lll} 1) u_n = \frac{ch(n)}{ch(2n)} & 2) u_n = \frac{1}{\sqrt{n^2-1}} - \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} & 3) u_n = e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \\ 4) u_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} & 5) u_n = \frac{1}{n \cos^2 n} & 6) u_n = \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}} \end{array}$$

Exercice 2 :

Déterminer la nature de la série $\sum_n u_n$ dans chacun des cas suivants :

$$\begin{array}{lll} 1) u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}} & 2) u_n = \frac{(-1)^n}{\ln(n+(-1)^n)} & 3) u_n = \frac{(-1)^n}{\ln n + (-1)^n} \\ 4) u_n = \sqrt{n + (-1)^n} - \sqrt{n} & 5) u_n = \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{n+1}\right) & 6) u_n = \sin \left(\frac{\pi n^2}{n+1}\right) \\ 7) u_n = \frac{(-1)^n}{n + (-1)^{n-1}} & 8) u_n = \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) & 9) u_n = \frac{1}{n^\alpha} \sum_{k=1}^n k^{\frac{3}{2}} \end{array}$$

Exercice 3 :

Soit $\sum_n u_n$ une série à termes positifs. Notons $v_n = \frac{u_n}{u_{n+1}}$. Montrons que

$$\sum_n u_n \text{ converge} \Leftrightarrow \sum_n v_n \text{ converge}$$

Exercice 4 :

- 1) Notons $u_n = \sin((2 - \sqrt{3})^n \pi)$
 - i) Montrer que la série $\sum_n u_n$ est à termes positifs.
 - ii) Quelle est sa nature ?
- 2) Posons $A_n = (2 - \sqrt{3})^n + (2 + \sqrt{3})^n$. Montrer que $A_n \in \mathbb{N}$.
- 3) En déduire la nature de la série $\sum_n v_n$; où $v_n = \sin((2 + \sqrt{3})^n \pi)$

Exercice 5 :

Justifier l'existence des sommes suivantes et calculer-les :

$$\begin{array}{llll} 1) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} & 2) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5n+6}{n(n+1)(n+2)} & 3) \sum_{n=2}^{+\infty} \ln \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) & 4) \sum_{n=1}^{+\infty} \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right) \\ 5) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{3^n} & 6) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(2n+1)} & 7) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} & 8) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{th\left(\frac{a}{2^n}\right)}{2^n} \end{array}$$

Exercice 6 :

On donne les sommes : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e$.

Calculer les sommes suivantes après avoir justifié leurs existences :

$$1) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \quad 2) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2(n+1)^2} \quad 3) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{n!} \quad 4) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2-2}{n!}$$

Exercice 7 :

Posons $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}$.

1) Justifier la convergence de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ et préciser $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n$.

2) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, R_n + R_{n+1} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k(k+1)}$$

3) Déterminer un équivalent simple de R_n .

4) Quelle est la nature de la série $\sum_{n \geq 1} R_n$?.

Exercice 8 :

Considérons deux suites complexes $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Posons $u_n = \alpha_n v_n$

et $S_n = \sum_{k=0}^n v_k$.

1) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n u_k = \sum_{k=0}^{n-1} (\alpha_k - \alpha_{k+1}) S_k + \alpha_n S_n$$

2) Supposons maintenant que $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est réelle positive décroissante de limite nulle, et que la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.

Montrer que la série $\sum_n (\alpha_n - \alpha_{n+1}) S_n$ converge absolument et que la

série $\sum_n u_n$ converge.

3) Soient $\beta > 0$ et $\theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$.

i) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, |1 + e^{i\theta} + \dots + e^{in\theta}| \leq \frac{1}{|\sin(\theta/2)|}$$

- ii) En déduire la convergence des séries $\sum_{n \geq 1} \frac{e^{in\theta}}{n^\beta}$, $\sum_{n \geq 1} \frac{\cos(n)}{n}$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(n)}{\sqrt{n}}$.

Exercice 9 :

Notons $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

- 1) Montrer que $H_n \sim \ln(n)$
- 2) Posons $U_n = H_n - \ln(n)$.
 - i) Montrer que $(U_{n+1} - U_n) = O(1/n^2)$.
 - ii) En déduire que

$$\exists \eta \in \mathbb{R}, H_n = \ln(n) + \eta + o(1)$$

- 3) Posons $V_n = H_n - \ln(n) - \eta$.
 - i) Montrer que $(V_{n+1} - V_n) \sim \frac{-1}{2n^2}$
 - ii) En déduire que $V_n \sim \frac{1}{2} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$
- 4) i) Montrer via une comparaison série-intégrale que

$$\forall \alpha > 1, \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$$

- ii) En déduire que $H_n = \ln(n) + \eta + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$

Exercice 10 : (Séries de **Bertrand**)

- 1) Montrer que

$$\forall \alpha > 1, \forall \beta \in \mathbb{R}, \sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta} \text{ converge}$$

- 2) Montrer que

$$\forall \alpha < 1, \forall \beta \in \mathbb{R}, \sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta} \text{ diverge}$$

- 3) Soit $\beta \in \mathbb{R}$. Par comparaison série-intégrale, montrer que

$$\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n (\ln n)^\beta} \text{ converge} \Leftrightarrow \beta > 1$$

- 4) Quelle est la nature des séries $\sum_{n \geq 1} \frac{\ln(n)}{n^2}$, $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{\sqrt{n} (\ln n)^2}$ et $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n (\ln n)^2}$?

CORRECTION

SÉRIES NUMÉRIQUES

Exercice 1 :

Déterminer la nature de la série $\sum_n u_n$ dans chacun des cas suivants :

- 1) $u_n = \frac{ch(n)}{ch(2n)}$ 2) $u_n = \frac{1}{\sqrt{n^2-1}} - \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$ 3) $u_n = e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$
 4) $u_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ 5) $u_n = \frac{1}{n \cos^2 n}$ 6) $u_n = \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$

$$1) u_n = \frac{ch n}{ch 2n} = \frac{e^n + e^{-n}}{e^{2n} + e^{-2n}}$$

$$\text{On a } \begin{cases} e^n + e^{-n} \sim e^n \\ e^{2n} + e^{-2n} \sim e^{2n} \end{cases} \Rightarrow u_n \sim \frac{e^n}{e^{2n}}$$

$$\Rightarrow u_n \sim \frac{1}{e^n}$$

D'où $\sum u_n$ et $\sum \frac{1}{e^n}$ sont de même nature.

Or $\sum \frac{1}{e^n}$, qui est la série géométrique $\sum \left(\frac{1}{e}\right)^n$, converge

$$\text{Car } \left|\frac{1}{e}\right| = \frac{1}{e} < 1$$

D'où $\sum u_n$ converge.

NB1 : (Point 2)

$$\sum \frac{1}{e^n} \text{ CV car } \frac{1}{e^n} = o\left(\frac{1}{n^2}\right) \text{ et qnr } \sum \frac{1}{n^2} \text{ CV } (\alpha=2>1)$$

NB2 : (Erreur 1)

$$\sum \frac{1}{e^n} \text{ CV car } \lim_n \frac{1}{e^n} = 0$$

Faux ! Car $\sum u_n \text{ CV} \Rightarrow \lim_n u_n = 0$, et non par l'inverse.

NB3 : (Erreur)

$$On a \begin{cases} Ch(n) \sim 1 \\ Ch(2n) \sim 1 \end{cases} \Rightarrow U_n = \frac{Ch(n)}{Ch(2n)} \sim 1 \text{ etc}$$

Faux ! car $Ch(n) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} 1$, alors qu'ici $n \rightarrow +\infty$.

NB3 : (Erreur)

$$\sum \frac{1}{e^n} \text{ Div car } \frac{1}{e^n} = o\left(\frac{1}{n}\right) \text{ et qnr } \sum \frac{1}{n} \text{ Div } (d=1 \leq 1)$$

Faux ! car avec $\sum \frac{1}{n} \text{ Div}$, on ne peut rien conclure.

2) $u_n = \frac{1}{\sqrt{n^2-1}} - \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$

NB1 (Erreur)

$$On a \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \sim \frac{1}{n} \\ \frac{1}{\sqrt{n^2-1}} \sim \frac{1}{n} \end{cases}, \text{ alors } \left(\frac{1}{\sqrt{n^2-1}} - \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \right) \sim \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n} \right) \text{ etc}$$

C'est Faux ! Pour l'équivalence, on n'a pas le droit de passer à la somme ou à la soustraction.

Solution

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{1}{\sqrt{n^2-1}} - \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \\ &= \frac{\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1}}{\sqrt{n^2+1} \times \sqrt{n^2-1}} \end{aligned}$$

$$On a : \sqrt{n^2+1} \times \sqrt{n^2-1} \sim (n \times n) \sim n^2$$

Passons au numérateur:

$$\begin{aligned}\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1} &= \frac{(\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1})(\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2-1})}{(\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2-1})} \\&= \frac{2}{\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2-1}} \\&= \frac{2}{n \left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}} + \sqrt{1-\frac{1}{n^2}} \right)}\end{aligned}$$

$$\text{et on a } \lim_n \left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}} + \sqrt{1-\frac{1}{n^2}} \right) = 2$$

$$\text{Donc } \left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}} + \sqrt{1-\frac{1}{n^2}} \right) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} 2$$

$$\text{Donc } \sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1} = \frac{2}{n \left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}} + \sqrt{1-\frac{1}{n^2}} \right)} \underset{n}{\sim} \frac{1}{n}$$

$$\text{Ainsi : } \left| \begin{aligned} u_n &= \frac{\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1}}{\sqrt{n^2+1} \times \sqrt{n^2-1}} \\ \left(\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1} \right) &\sim \frac{1}{n} \\ \sqrt{n^2+1} \times \sqrt{n^2-1} &\sim n^2 \end{aligned} \right.$$

$$\text{Donc } u_n \sim \frac{1}{n^2}$$

$$\Rightarrow u_n \sim \frac{1}{n^3}$$

$\Rightarrow \sum u_n$ et $\sum \frac{1}{n^3}$ de même nature.

Or $\sum \frac{1}{n^3}$ converge (Riemann: $\alpha=3>1$), alors $\sum u_n$ CV

Méthode 2 (via les développements limités)

$$U_n \sim ?$$

On a :

$$U_n = \frac{1}{\sqrt{n^2-1}} - \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$$

$$= \frac{1}{n} \left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}} - \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} \right)$$

$$= \frac{1}{n} \left(\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^{-\frac{1}{2}} - \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \right)$$

$$= \frac{1}{n} \left(\left[\left(1 + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{n^2}\right) + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \right] - \left[\left(1 + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{n^2}\right) + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \right] \right)$$

Rappel

$$(1+t)^a \underset{t \rightarrow 0}{\sim} 1 + at + o(t)$$

$$\Rightarrow U_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right)$$

Or $\left(U_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n} \times \frac{1}{n^2} \sim \frac{1}{n^3} \right)$

etc

Erreur ⚠

On a $\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} = (1+n^2)^{-\frac{1}{2}}$, et qu'utilise le Dév limite' $(1+t)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \dots$

C'est faux ! Car $t \rightarrow 0$ alors que $n^2 \rightarrow +\infty$.

$$3) u_n = e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

$$= e - e^{n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}$$

$$= e - e^{n \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)}$$

$$= e - e^{\frac{1}{2} - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)}$$

Rappel:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$$

$$u_n = e \left(1 - e^{-\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)}\right)$$

Développement part: $e^t = 1 + t + o(t)$ $t \rightarrow 0$

$$\Rightarrow e^{-t + o(t)} = 1 - t + o(t) \quad t \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow e^{-\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)} = 1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \quad n \rightarrow +\infty$$

Donc $\Rightarrow \left(1 - e^{-\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)}\right) = \left(\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \sim \frac{1}{2n}$

$$\Rightarrow u_n \sim \frac{e}{2n}$$

$$\Rightarrow \sum u_n \text{ et } \sum \frac{e}{2n} \text{ ont de même nature.}$$

Or $\sum \frac{e}{2n}$ diverge, d'après Riemann ($\alpha = 1 \leq 1$)

Alors $\boxed{\sum u_n \text{ diverge}}$

Exercice 5 :

Justifier l'existence des sommes suivantes et calculer-les :

1) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ 2) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5n+6}{n(n+1)(n+2)}$ 3) $\sum_{n=2}^{+\infty} \ln \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$ 4) $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)$
 5) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{3^n}$ 6) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(2n+1)}$ 7) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ 8) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{th\left(\frac{a}{2^n}\right)}{2^n}$

$$\begin{aligned}
 5) \quad S &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{3^n} \\
 &= \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n}{3^{n-1}} \quad (\text{décalage d'indice}) \\
 &= \frac{1}{3^{-1}} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n}{3^n} \\
 &= 3 \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{3^n} - \frac{1}{3} \right)
 \end{aligned}$$

$$S = 3 \left(S - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^n} - \frac{1}{3} \right)$$

$$\Rightarrow 2S = 3 \left(\frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n \right)$$

$$S = \frac{3}{2} \left[\frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^1 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} \right]$$

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{3^n}$$

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=N}^{+\infty} q^n &= \frac{q^N}{1-q} \\
 \text{si } |q| < 1
 \end{aligned}$$

$$S = \frac{5}{4}$$

$$3) S = \sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

$$= \sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)$$

$$= \sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(\frac{(n-1)(n+1)}{n^2}\right)$$

$$= \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\ln\left(\frac{n-1}{n}\right) + \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \right)$$

$$= \sum_{n=2}^{+\infty} \underbrace{\left(\ln\left(\frac{n-1}{n}\right) - \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) \right)}_{\text{téléscopie}}$$

$$= \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=2}^N \left(\ln\left(\frac{n-1}{n}\right) - \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) \right)$$

$$= \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\ln\left(\frac{1}{2}\right) - \underbrace{\ln\left(\frac{N}{N+1}\right)}_{\rightarrow 0} \right)$$

$$S = -\ln 2$$

$$\begin{aligned}
 7) \quad S &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} \\
 &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{2n-1}}{(2n)^2} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{(2n+1)-1}}{(2n+1)^2} \\
 &= - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \\
 &= -\frac{1}{4} \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}
 \end{aligned}$$

On a besoin de la somme classique : $\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$

$$\Rightarrow S = -\frac{\pi^2}{24} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \quad \star$$

Reste à calculer la somme : $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$

On a :

$$\begin{aligned}
 \frac{\pi^2}{6} &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \\
 &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^2} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \\
 \frac{\pi^2}{6} &= \frac{1}{4} \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}}_{=\frac{\pi^2}{6}} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}
 \end{aligned}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \left(1 - \frac{1}{4}\right) \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{8} \quad \star \quad \star$$

De $\star$ et $\star \star$ on tire que

$$S = \frac{-\pi^2}{24} + \frac{\pi^2}{8}$$

$$\Rightarrow \boxed{S = \frac{\pi^2}{12}}$$

Exercice 8 :

Considérons deux suites complexes $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Posons $u_n = \alpha_n v_n$

et $S_n = \sum_{k=0}^n v_k$.

1) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n u_k = \sum_{k=0}^{n-1} (\alpha_k - \alpha_{k+1}) S_k + \alpha_n S_n$$

2) Supposons maintenant que $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est réelle positive décroissante de limite nulle, et que la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.

Montrer que la série $\sum_n (\alpha_n - \alpha_{n+1}) S_n$ converge absolument et que la série $\sum_n u_n$ converge.

1) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n u_k &= \sum_{k=0}^n \alpha_k v_k \\ &= \alpha_0 v_0 + \sum_{k=1}^n \alpha_k v_k \\ &= \alpha_0 v_0 + \sum_{k=1}^n \alpha_k (S_k - S_{k-1}) \\ &= \alpha_0 v_0 + \sum_{k=1}^n \alpha_k S_k - \sum_{k=1}^n \alpha_k S_{k-1} \\ &= \alpha_0 v_0 + \sum_{k=1}^n \alpha_k S_k - \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_{k+1} S_k \\ &= \alpha_0 S_0 + \sum_{k=1}^n \alpha_k S_k - \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_{k+1} S_k \\ &= \sum_{k=0}^n \alpha_k S_k - \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_{k+1} S_k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_n &= \alpha_n v_n \\ S_n &= \sum_{k=0}^n v_k \end{aligned}$$

$$\forall k \geq 1, v_k = S_k - S_{k-1}$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} (\alpha_k - \alpha_{k+1}) S_k + \alpha_n S_n$$

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^n v_k \\ S_0 &= v_0 \end{aligned}$$

$$= \alpha_n S_n + \left(\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k S_k - \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_{k+1} S_k \right)$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} (\alpha_k - \alpha_{k+1}) S_k + \alpha_n S_n$$

$$= \alpha_n S_n + \sum_{k=0}^{n-1} (\alpha_k - \alpha_{k+1}) S_k$$

2) Supposons maintenant que $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est réelle positive décroissante de limite nulle, et que la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.

i) Montrer que la série $\sum_n (\alpha_n - \alpha_{n+1}) S_n$ converge absolument

Càd on montrera que la série positive $\sum_n |(\alpha_n - \alpha_{n+1}) S_n|$ converge.

$(S_n)_n$ bornée $\Rightarrow (\exists M > 0, \forall n \in \mathbb{N}, |S_n| \leq M)$

$$\text{D'où : } (\forall n \in \mathbb{N}, |(\alpha_n - \alpha_{n+1}) S_n| = \underbrace{|\alpha_n - \alpha_{n+1}|}_{= \alpha_n - \alpha_{n+1}} \cdot \underbrace{|S_n|}_{\leq M}$$

Car (α_n) décroissante

$$\Rightarrow (\forall n \in \mathbb{N}, |(\alpha_n - \alpha_{n+1}) S_n| \leq M (\alpha_n - \alpha_{n+1}))$$

Par comparaison des séries positives, il reste à vérifier que la série télescopique $\sum_n (\alpha_n - \alpha_{n+1})$ converge.

Càd que la suite $(\alpha_n)_n$ converge, ce qui est le cas, car $(\alpha_n)_n$ décroissante et minorée par 0 (car positive).

ii) Montrons que la série $\sum_n u_n$ converge.

$$\text{On a : } \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n u_k = \sum_{k=0}^{n-1} (\alpha_k - \alpha_{k+1}) S_k + \alpha_n S_n \quad (R)$$

Il s'agit de montrer que la suite $\left(\sum_{k=0}^n u_k \right)_n$ converge.

Du (2), il suffit de vérifier que les deux suites

$$\left(\sum_{k=0}^n (d_k - d_{k+1}) S_k \right)_n \text{ et } (d_n S_n)_n \text{ convergent.}$$

Et on a que la suite $\left(\sum_{k=0}^n (d_k - d_{k+1}) S_k \right)_n$ converge car la série

$$\sum_n (d_n - d_{n+1}) S_n \text{ est convergente (car ACV),}$$

Et la suite $(d_n S_n)_n$ converge (vers 0) car c'est le produit de

la suite $(d_n)_n$ qui tend vers 0 et la suite $(S_n)_n$ qui est

bornée.

3) Soient $\beta > 0$ et $\theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$.

i) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, |1 + e^{i\theta} + \dots + e^{in\theta}| \leq \frac{1}{|\sin(\theta/2)|}$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, On a :

$$1 + e^{i\theta} + \dots + e^{in\theta} = \sum_{k=0}^n e^{ik\theta}$$

$$= \sum_{k=0}^n (e^{i\theta})^k$$

$$= \frac{1 - (e^{i\theta})^{n+1}}{1 - e^{i\theta}} \quad (\text{Car } e^{i\theta} \neq 1, \text{ puisque } \theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z})$$

$$= \frac{e^{i(n+1)\theta} - 1}{e^{i\theta} - 1} \quad (\text{Rappel: } e^{ix} - 1 = 2i \sin\left(\frac{x}{2}\right) e^{i\frac{x}{2}})$$

$$1 + e^{i\theta} + \dots + e^{in\theta} = \frac{e^{i(n+1)\frac{\theta}{2}} \cdot 2i \sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{e^{i\frac{\theta}{2}} \cdot 2i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$|1 + e^{i\theta} + \dots + e^{in\theta}| = \frac{|\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)|}{|\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)|} < \frac{1}{|\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)|}$$

Rappel:
 $|e^{ix}| = 1$

(ii) En déduire la convergence des séries $\sum_{n \geq 1} \frac{e^{in\theta}}{n^\beta}$, $\sum_{n \geq 1} \frac{\cos(n)}{n}$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(n)}{\sqrt{n}}$.

D'après 2°), on a :

Si $\begin{cases} (d_n)_n \text{ positive, décroissante de limite nulle} \\ \text{La suite de terme général } S_n = \sum_{k=0}^n v_k \text{ bornée} \end{cases}$

Alors la série $\sum_n d_n v_n$ converge.

(A) $\sum_{n \geq 1} \frac{e^{in\theta}}{n^\beta}$ converge, en effet :

Notons $\begin{cases} d_n = \frac{1}{n^\beta} \text{ pour tout } n \geq 1 \text{ et } d_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, v_n = e^{in\theta}. \end{cases}$

On a $(d_n)_n$ positive, décroissante et $\lim_n d_n = 0$.

En plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$|S_n| = \sum_{k=0}^n v_k = \left| \sum_{k=0}^n e^{ik\theta} \right| < \frac{1}{|\sin \frac{\theta}{2}|}$$

D'où d'après 2°), la série $\sum_{n \geq 0} d_n v_n$, qui est $\sum_{n \geq 1} \frac{e^{in\theta}}{n^\beta}$ converge.

(B) $\sum_{n \geq 1} \frac{\cos(n)}{n}$ Converge ; en effet :

On utilise (A) ; pour $\left\{ \begin{array}{l} \theta = 1 \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z} \\ \beta = 1 > 0 \end{array} \right.$, on tire que

la série $\sum_n \frac{e^{in}}{n}$ Converge .

D'où sa série partie réelle, qui est $\sum_n \frac{\cos n}{n}$, Converge.

(C) $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin n}{\sqrt{n}}$ Converge ; en effet :

On procède tout comme en B), on prend $\left\{ \begin{array}{l} \theta = 1 \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z} \\ \beta = \frac{1}{2} > 0 \end{array} \right.$.

On tire que la série complexe $\sum_n \frac{e^{in}}{\sqrt{n}}$ Converge .

D'où sa partie imaginaire, la série $\sum_n \frac{\sin n}{\sqrt{n}}$, Converge .

Fin Exercice 8

Exercice 9 :

Notons $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

- 1) Montrer que $H_n \sim \ln(n)$
- 2) Posons $U_n = H_n - \ln(n)$.
 - i) Montrer que $(U_{n+1} - U_n) = O(1/n^2)$.
 - ii) En déduire que

$$\exists \eta \in \mathbb{R}, H_n = \ln(n) + \eta + o(1)$$

- 3) Posons $V_n = H_n - \ln(n) - \eta$.
 - i) Montrer que $(V_{n+1} - V_n) \sim \frac{-1}{n^2}$
 - ii) En déduire que $V_n \sim \frac{1}{2} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$

- 4) i) Montrer via une comparaison série-intégrale que

$$\forall \alpha > 1, \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$$

- ii) En déduire que $H_n = \ln(n) + \eta + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$

Solution

Notons $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

- 1) Montrer que $H_n \sim \ln(n)$

On a $\frac{1}{k} \sim \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$ et $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k}$ diverge

D'où $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sim \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$

D'autre part, $\sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^n (\ln(k+1) - \ln k) = \ln(n+1)$ → télescopie

et $\ln(n+1) = \ln\left(n\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) = \ln n + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln n$

Donc $\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sim \ln n \right)_{n \rightarrow +\infty}$

2) Posons $U_n = H_n - \ln(n)$.

i) Montrer que $(U_{n+1} - U_n) = O(1/n^2)$.

ii) En déduire que

$$\exists \eta \in \mathbb{R}, H_n = \ln(n) + \eta + o(1)$$

$$\begin{aligned} U_{n+1} - U_n &= H_{n+1} - \ln(n+1) - H_n + \ln n \\ &= \frac{1}{n+1} - [\ln(n+1) - \ln n] \quad \left(\text{car } H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) \end{aligned}$$

$$U_{n+1} - U_n = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

$$\frac{1}{n+1} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{n}}$$

$$\underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{n} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right) \quad \left(\text{car } \frac{1}{1+x} = 1 + O(x) \right)_{x \rightarrow 0}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad \left(\text{car } \ln(1+x) = x + O(x^2) \right)_{x \rightarrow 0}$$

Donc $\frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$

Cad

$$U_{n+1} - U_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

2) Posons $U_n = H_n - \ln(n)$.

i) Montrer que $(U_{n+1} - U_n) = O(1/n^2)$.

ii) En déduire que

$$\exists \eta \in \mathbb{R}, H_n = \ln(n) + \eta + o(1)$$

On a $U_{n+1} - U_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et $\sum_n \frac{1}{n^2}$ converge

Donc la série télescopique $\sum (U_{n+1} - U_n)$ converge.

Alors la suite $(U_n)_n$ converge.

$$\Rightarrow \exists \gamma \in \mathbb{R}, \lim_n U_n = \gamma$$

$$\Rightarrow \exists \gamma \in \mathbb{R}, U_n - \gamma = o(1) \quad \left(\lim (U_n - \gamma) = 0 \Leftrightarrow U_n - \gamma = o(1) \right)$$

$$\Rightarrow \exists \gamma \in \mathbb{R}, H_n - \ln n - \gamma = o(1)$$

$$\Rightarrow \exists \gamma \in \mathbb{R}, H_n = \ln n + \gamma + o(1)$$

3) Posons $V_n = H_n - \ln(n) - \eta$.

i) Montrer que $(V_{n+1} - V_n) \sim \frac{-1}{n^2}$

ii) En déduire que $V_n \sim \frac{1}{2} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$

$$V_n = H_n - \ln n - \gamma \quad \text{et} \quad V_{n+1} = H_{n+1} - \ln(n+1) - \gamma$$

$$V_{n+1} - V_n = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

$$\frac{1}{n+1} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{n}}$$

$$= \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right) \quad \left(\frac{1}{1+x} = 1 - x + o(x) \right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad \left(\overset{\text{vu}}{\ln(1+x)} \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \right)$$

$$\text{Donc} \quad \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = -\frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^2}$$

$$\text{Enfin} \quad (V_{n+1} - V_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^2}$$

3) Posons $V_n = H_n - \ln(n) - \eta$.

i) Montrer que $(V_{n+1} - V_n) \sim \frac{-1}{2n^2}$

ii) En déduire que $V_n \sim \frac{1}{2} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$

$$\text{On a} \quad (V_n - V_{n+1}) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2} \text{ et } \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{2k^2} \text{ converge}$$

$$\text{Donc} \quad \sum_{k=n}^{+\infty} (V_k - V_{k+1}) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{2k^2}$$

$$\text{Or} \quad \sum_{k=n}^{+\infty} (V_k - V_{k+1}) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=n}^N (V_k - V_{k+1}) \right)$$

$$= \lim_{N \rightarrow +\infty} (V_n - V_{N+1})$$

$$= V_n \quad (\text{car 2)ii}) \Rightarrow \lim_{p \rightarrow +\infty} V_p = 0$$

Donc

$$V_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$$

4) (i) Montrer via une comparaison série-intégrale que

$$\forall \alpha > 1, \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$$

ii) En déduire que $H_n = \ln(n) + \eta + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$

$$\frac{1}{(k+1)^\alpha} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t^\alpha} dt \leq \frac{1}{k^\alpha}$$

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{t^\alpha} dt \leq \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_{k-1}^k \frac{1}{t^\alpha} dt$$

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\int_k^{k+1} \frac{1}{t^\alpha} dt \right) \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\int_{k-1}^k \frac{1}{t^\alpha} dt \right)$$

$$\int_{n+1}^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_n^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt \quad (1)$$

$$\int_n^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt = \int_n^{+\infty} t^{-\alpha} dt = \left[\frac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \right]_n^{+\infty} = \underbrace{\left(\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^{(1-\alpha)\ln t}}{1-\alpha} \right)}_{=0 \text{ car } \alpha > 1} + \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$$

$$\Rightarrow \int_n^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt = \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$$

$$\text{et } \int_{n+1}^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt = \frac{1}{(\alpha-1)(n+1)^{\alpha-1}} \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$$

et (1) $\Rightarrow$

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$$

4) i) Montrer via une comparaison série-intégrale que

$$\forall \alpha > 1, \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$$

ii) En déduire que $H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$

On a $V_n \sim \frac{1}{2} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$

et $\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ d'après 4/i), pour $\alpha = 2 > 1$.

D'où $V_n \sim \frac{1}{2n}$

$$\Rightarrow V_n = \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\Rightarrow H_n - \ln n - \gamma = \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

D'où

$$H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Rappel

$$U_n \sim V_n \Leftrightarrow U_n = V_n + o(V_n)$$

$$V_n = H_n - \ln n - \gamma$$

Exercice 10 : (Séries de **Bertrand**)

1) Montrer que

$$\forall \alpha \succ 1, \forall \beta \in \mathbb{R}, \sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta} \text{ converge}$$

2) Montrer que

$$\forall \alpha \prec 1, \forall \beta \in \mathbb{R}, \sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta} \text{ diverge}$$

3) Soit $\beta \in \mathbb{R}$. Par comparaison série-intégrale, montrer que

$$\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n (\ln n)^\beta} \text{ converge} \Leftrightarrow \beta \succ 1$$

4) Quelle est la nature des séries $\sum_{n \geq 1} \frac{\ln(n)}{n^2}$, $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{\sqrt{n} (\ln n)^2}$ et $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n (\ln n)^2}$?**CORRECTION**

1) Montrer que

$$\forall \alpha \succ 1, \forall \beta \in \mathbb{R}, \sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta} \text{ converge}$$

Soient $\alpha \succ 1$ et $\beta \in \mathbb{R}$.Montrons que la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ converge.Soit $1 < \alpha' < \alpha$.

$$\lim_n n^{\alpha'} \cdot \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta} = \lim_n \frac{n^{\alpha' - \alpha}}{(\ln n)^\beta} = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \alpha' - \alpha < 0 \\ \frac{n^{\alpha' - \alpha}}{(\ln n)^\beta} \rightarrow 0 \\ n \rightarrow +\infty \end{array} \right\}$$

Par croissance comparée et que $n^{\alpha'-\alpha} \rightarrow 0$.

$$\Rightarrow \lim_n \frac{\left(\frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta} \right)}{\left(\frac{1}{n^{\alpha'}} \right)} = 0$$

$$1 < \alpha' < \alpha$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta} = o\left(\frac{1}{n^{\alpha'}}\right)$$

Or $\sum_n \frac{1}{n^{\alpha'}}$ converge (car $\alpha' > 1$)

D'où $\sum_n \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ converge



2) Montrer que

$$\forall \alpha < 1, \forall \beta \in \mathbb{R}, \sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta} \text{ diverge}$$

Soient $\alpha < 1$ et $\beta \in \mathbb{R}$.

Montrons que la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ diverge.

Soit $\alpha < \alpha' < 1$.

$$\lim_n n^{\alpha'} \cdot \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta} = \lim_n \frac{n^{\alpha' - \alpha}}{(\ln n)^\beta} = +\infty$$

$$\begin{array}{l} \alpha' - \alpha > 0 \\ n^{\alpha' - \alpha} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty \end{array}$$

Par croissance comparée et que $n^{\alpha' - \alpha} \rightarrow +\infty$.

$$\Rightarrow \lim_n \frac{\left(\frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta} \right)}{\left(\frac{1}{n^{\alpha'}} \right)} = +\infty$$

$$\Rightarrow \lim_n \frac{\left(\frac{1}{n^{\alpha'}} \right)}{\left(\frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta} \right)} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n^{\alpha'}} = o\left(\frac{1}{n^{\alpha} (\ln n)^{\beta}}\right) \quad \alpha < \alpha' < 1$$

On $\sum_n \frac{1}{n^{\alpha'}}$ diverge (car $\alpha' < 1$)

Donc $\sum_n \frac{1}{n^{\alpha} (\ln n)^{\beta}}$ diverge.

