LES SUITES RÉELLES

* **Exercice 1** Soit (u_n) et (v_n), deux suites convergeant respectivement vers α et β.

On pose : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $m_n = \min(u_n, v_n)$ et $M_n = \max(u_n, v_n)$: ces deux suites convergent-elles nécessairement ? Si oui, préciser leurs limites.

Exercice 2 Soit, pour $n \geq 1$, $u_n = \dfrac{(\ln n)^n}{n!}$. Montrer que $\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ converge vers 0.

Justifier alors qu'il existe un entier N tel que : si $n \geq N$, alors $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq \dfrac{1}{2}$.

Monotonie de (u_n) ? En déduire, par l'absurde, que (u_n) converge vers 0.

* **Exercice 3** Soit $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{n} e^{-u_n}$ pour tout $n \geq 0$.

Prouver : $\forall n \geq 2$, $0 < u_n \leq \dfrac{1}{n-1}$. En déduire la limite de (u_n) et un équivalent simple.

Exercice 4 Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à termes dans $\mathbb{Z}$.

Montrer l'équivalence : u converge $\Leftrightarrow$ u est stationnaire.

Exercice 5 Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs. On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = L > 0$.

1. Montrer que, si $L < 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
2. Montrer que, si $L > 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
3. Que peut-on dire si $L = 1$? Examiner les cas : $u_n = n$, $u_n = \frac{1}{n}$, $u_n = a + \frac{1}{n}$, $u_n = 3 + \sin\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{n}\right)$.
4. Applications. Etudier les limites de : $\dfrac{(2n)!}{(n!)^2}$, $\dfrac{(2n)!}{n!n^n}$, $\ln(n)$, $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$.

* **Exercice 6** Montrer que : $\forall x \in [0, +\infty[$, $x - \dfrac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$.

En déduire la limite de la suite (u_n) où $u_n = \prod\limits_{k=1}^{n} \left(1 + \dfrac{k}{n^2}\right)$.

* **Exercice 7** On définit la suite $u = (u_n)_{n\geq 1}$ par : $\forall n \geq 1$, $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{n+k}$.

1. Prouver que la suite u est bornée et monotone. Que peut-on en déduire ?

2.Justifier l'encadrement : $\displaystyle\int_{n+1}^{2n+1} \frac{1}{t}\mathrm{d}t \leq u_n \leq \int_{n}^{2n} \frac{1}{t}\mathrm{d}t.$

En déduire la valeur de $\lim u$.

* **Exercice 8**

1. Montrer : $\forall x \geq 0$, $x - \dfrac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x$.
2. On pose, pour $n \geq 1$: $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{k}{n^2}$ et $v_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \sin\left(\dfrac{k}{n^2}\right)$. Montrer que (u_n) puis (v_n) convergent.

* **Exercice 9** Soit a et b, deux réels tels que $0 < a < b$.
Calculer la limite de la suite u définie par $u_n = \dfrac{a^{n+1} + b^{n+1}}{a^n + b^n}$.

* **Exercice 10** Déterminer les limites des suites de terme général :

1. $\sqrt{n+1}\cos(n) - n$ 2. $\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^n$ 3. $\dfrac{(-1)^n \sin^2 n}{n}$ 4. $\displaystyle\sum_{k=n}^{2n} e^{-k}$

Exercice 11 *(théorème de Césaro)*

*
1. Montrer que, si (u_n) est une suite convergente de limite L, alors la suite (v_n) est également une suite convergente de limite L où $v_n = \dfrac{u_0 + u_1 + \cdots + u_n}{n+1}$.
Vérifier que la réciproque est fausse en étudiant le cas $u_n = (-1)^n$.
2. Montrer que, si (w_n) est une suite vérifiant $\lim\limits_{n\to+\infty} (w_{n+1} - w_n) = L$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{w_n}{n} = L$.

Exercice 12 On dit qu'une suite (u_n) est *de Cauchy* si elle vérifie :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall (n,p) \in \mathbb{N}^2 : (n \geq N \text{ et } p \geq N) \Rightarrow |u_n - u_p| \leq \varepsilon \ .$$

1. Montrer que toute suite convergente est *de Cauchy*.
2. Montrer que toute suite *de Cauchy* est bornée.
3. Soit (u_n) une suite réelle *de Cauchy*. On pose $a_n = \inf\{u_p \mid p \geq n\}$ et $b_n = \sup\{u_p \mid p \geq n\}$.
Montrer que les suites (a_n) et (b_n) sont des suites adjacentes. En déduire que (u_n) converge.
4. Application : montrer que la suite $(u_n) = \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right)$ diverge.

* **Exercice 13** Montrer que : $\forall n \geq 1$, $\dfrac{1}{n!} \leq \dfrac{1}{2^{n-1}}$. En déduire la convergence de (u_n) où $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.

Exercice 14 *(Constante d'Euler)*

*
1. Montrer que, pour tout $k \geq 1$: $\dfrac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \dfrac{1}{k}$ (raisonner à l'aide d'intégrale).
2. En déduire que la suite de terme général $u_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n} - \ln(n)$ est décroissante et positive.
Conclusion ?

* **Exercice 15** Déterminer deux réels a et b tels que : $\forall k \geq 1$, $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{a}{k} + \dfrac{b}{k+1}$.

Etudier alors la convergence de la suite (v_n) où $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$.

On définit (u_n) par $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$. Donner un encadrement de la suite (u_n) utilisant des termes de la suite (v_n). Que peut-on en déduire concernant la convergence de (u_n) ?

* **Exercice 16** Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = 1$ et pour $n \geq 0$, $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n}$.

1. Montrer que la suite (u_n) diverge vers $+\infty$.
2. On pose, pour tout $n \geq 1$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{u_k}$: simplifier S_n et déduire $S_n \sim u_n$.

* **Exercice 17** Soit (u_n) une suite définie par : u_0 quelconque et pour $n \geq 0$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + 1}$.
Montrer que la suite diverge vers $+\infty$.
En remarquant que $u_n^2 = u_0^2 + n$, déterminer un équivalent simple de u_n.

SUITES EXTRAITES

*

Exercice 18 On pose $u_n = \sqrt{n} - E(\sqrt{n})$.

1. Etudier la suite a où $a_n = u_{n^2}$. Conséquence ?
2. Etudier la suite b où $b_n = u_{n^2+3n}$: on pourra utiliser l'encadrement $(n+1)^2 \leq n^2+3n < (n+2)^2$.
3. Que peut-on en déduire concernant la convergence de la suite u ?

*

Exercice 19 Sur l'ensemble $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites réelles, on définit la relation binaire $\mathcal{R}$ par : $\forall (u,v) \in E^2$, $u\mathcal{R}v$ si u est une suite extraite de v. $\mathcal{R}$ est-elle une relation d'ordre sur E ?
Indication : étudier le cas des suites u et v avec $u_n = (-1)^n = v_{n+2}$ et $v_n = (-1)^{n+1} = u_{n+1}$.

*

Exercice 20

1. Montrer que : (u_n) converge si et seulement si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent et ont même limite.
2. Montrer que : si (u_{2n}), (u_{2n+1}) et (u_{3n}) convergent, alors (u_n) est convergente.
   Indication : on pourra considérer les suites extraites (u_{6n}) et $(u_{3(2n+1)})$.

*

Exercice 21

1. Montrer que si (u_n) est une suite convergente, alors $(u_{2n} - u_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.
2. On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Montrer que : $\forall n \geq 1$, $S_{2n} - S_n \geq \dfrac{1}{2}$. Conclusion concernant la suite (S_n) ?

SUITES ADJACENTES

*

Exercice 22 On définit : $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \dfrac{1}{n.n!}$ (pour $n \geq 1$).

1. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes. On note ℓ leur limite commune.
2. Justifier que, pour tout $n \geq 1$, $u_n < \ell < v_n$.
3. On suppose que $\ell = \dfrac{p}{q}$, avec $(p,q) \in \mathbb{N}^{*2}$: on pose $A = q!u_q - (q-1)!p$.
   Justifier que A est un entier et que $0 < A < \dfrac{1}{q}$. Conclure à une absurdité. Qu'a-t-on prouvé ?
4. On pose $\alpha_n = e - \displaystyle\int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} e^t \mathrm{d}t$: vérifier que $\alpha_1 = u_1$ et, pour tout $n \geq 1$, $\alpha_{n+1} - \alpha_n = u_{n+1} - u_n$.
   Conclusion ?
5. Justifier : pour tout $n \geq 1$, $|e - u_n| \leq \dfrac{e}{n!}$. Conclusion ?

*

Exercice 23 Montrer que les suites suivantes sont adjacentes et conclure :

1. $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$ et $v_n = u_n + \dfrac{1}{n}$.
2. $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ et $v_n = u_n + \dfrac{1}{n}$.

*

Exercice 24 Soit la suite $u = (u_n)_{n \geq 1}$: $\forall n \geq 1$, $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

1. Montrer que les suites $p = (p_n)_{n \geq 1} = (u_{2n})_{n \geq 1}$ et $i = (i_n)_{n \geq 0} = (u_{2n+1})_{n \geq 0}$ sont des suites adajcentes.
2. Montrer que la suite u converge. On note L sa limite.
3. Comment obtenir une valeur approchée de L à 10^{-2} près ?
4. Simplifier $f_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (-x)^k$, calculer $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x$ de deux manières, en déduire la valeur de L.

Exercice 25 Soit deux réels $0 < a < b$ et les suites (u_n) et (v_n) définies par :

$$u_0 = a,\ v_0 = b \text{ , pour tout } n \geq 0,\ u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \text{ et } v_{n+1} = \sqrt{u_{n+1} v_n}.$$

1. Démontrer que, pour tout $n \geq 0$, $0 < u_n \leq v_n$. En déduire les monotonies de ces deux suites.
2. Prouver que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite l.

SUITES RECURRENTES

* **Exercice 26** Pour $n \geq 2$: $u_n = \prod_{k=2}^{n} \cos\left(\frac{\pi}{2^k}\right)$ et $v_n = u_n \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$. Montrer que (v_n) est une suite géométrique, en déduire une expression de u_n et la convergence de u_n.

* **Exercice 27** Soit $u_0 = 1$ et, pour $n \geq 0$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{8 + 2u_n}$.

1. Prouver : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$.
2. **SI** (u_n) converge, quelle est sa limite ℓ ? Montrer qu'on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - \ell| \leq \frac{1}{32}|u_n - \ell|$.
3. En déduire que (u_n) converge.

* **Exercice 28** Soit $u_0 < u_1$, deux réels fixés, et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+2} = \frac{1}{2}(u_{n+1} + u_n)$.

1. $1^{\text{ère}}$ méthode : on pose $v_n = u_{n+1} - u_n$. Montrer que cette suite v est géométrique. En déduire une expression de u_n en fonction de n.
2. 2^{nde} méthode : on pose $w_n = u_{n+1} + \frac{1}{2}u_n$. Montrer que cette suite w est constante. Retrouver une expression de u_n en fonction de n.

COMPARAISON

* **Exercice 29** Donner un équivalent simple de $u_n = \dfrac{\ln(n+1)}{n} - \dfrac{\ln(n)}{n+1}$.

* **Exercice 30**
1. Rappeler le développement limité à l'ordre 1 au voisinage de 0 de $\sqrt{1+x}$.
2. En déduire un équivalent puis la limite de $u_n = \cos(\pi\sqrt{n^2+n})$ lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 31

1. Soit $u_n = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}$: en encadrant $\int_n^{n+1} \sqrt{x}\,\mathrm{d}x$, montrer que $u_n \sim \frac{2}{3}n\sqrt{n}$.
2. En déduire un équivalent de $v_n = \dfrac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} E(\sqrt{k})$.

* **Exercice 32** Pour $n \geq 1$, on pose $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. En encadrant l'intégrale $\int_{k-1}^{k} \frac{1}{t}\mathrm{d}t$, prouver : $\forall k \geq 2,\ \dfrac{1}{k} \leq \ln(k) - \ln(k-1) \leq \dfrac{1}{k-1}$.
2. En déduire : $\forall n \geq 1,\ \ln(n) + \dfrac{1}{n} \leq H_n \leq 1 + \ln(n)$.
3. Montrer alors l'équivalent $H_n \sim \ln(n)$, et en déduire la valeur de $\lim(H_n)$.
4. On pose, pour $n \geq 1$: $u_n = H_n - \ln(n)$ et $v_n = u_n - \dfrac{1}{n}$.
   Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
   On note γ *(constante d'Euler)* leur limite commune : justifier l'écriture : $H_n = \ln(n) + \gamma + o(1)$.
5. On pose $\varepsilon_n = H_n - \ln(n) - \gamma$: vérifier que, pour $n \geq 1$, on a $0 \leq \varepsilon_n \leq \dfrac{1}{n}$.
6. Méthode pour obtenir une valeur approchée de γ à 10^{-2} près ?
   Déterminer-la après avoir élaboré un algorithme puis traduiser-le en langage machine(Maple ou C)

7. Pour $n \geq 1$, on pose $K_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$.
   Etudier la monotonie de la suite (K_n) et en déduire qu'elle converge.
   Puis chercher une relation entre K_n, H_n et H_{2n} et établir $K_n = \ln(2) + o(1)$.
8. On pose, pour $n \geq 1$, $A_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$: à l'aide d'un raisonnement par récurrence, prouver que $A_{2n} = K_n$. En déduire la convergence de la suite (A_{2n}), sa limite, puis la convergence de (A_n).

SUITES COMPLEXES

* **Exercice 33** Etudier la convergence et la limite éventuelle de la suite $u = (u_n)_{n \geq 1}$ où $u_n = \dfrac{n+1}{n} - \dfrac{n}{n+i}$.

* **Exercice 34** Etudier la convergence et la limite éventuelle de la suite $u = (u_n)_{n \geq 2}$ où $u_n = \dfrac{1-n}{i^n n \ln(n)}$.

* **Exercice 35** Déterminer les limites, si elles existent, des suites suivantes :

1. $(e^{-n} + \dfrac{n+1}{n+\sqrt{n}} + i\sqrt{\dfrac{4n^2+5}{2n^2-n}})$ 2. $\left(\dfrac{1-i}{1-i\sqrt{3}}\right)^n$ 3. $(1+\dfrac{1}{n})e^{in\frac{\pi}{3}}$ 4. $(1+\dfrac{1}{n})^{-n^2} e^{in\frac{\pi}{3}}$

5. j^{3n+2} et $j^n + j^{n+1} + j^{n+2}$ 6. $(n+1)e^{i(2+\frac{1}{n})}$ 7. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{i}{n}\right)^n$