Exercice 2 (Extrait de : Mines-Ponts 2020)

1) Soit $n \in \mathbb{N}$. En utilisant la factorisation $(X+1)^{2n} = (X+1)^n(X+1)^n$, montrer que

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

$$(X+1)^{2n} = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{2n}{k} X^k$$

$$(X+1)^n = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{n}{k} X^k$$

$$(X+1)^n (X+1)^n = \sum_{k=0}^{+\infty} C_k X^k \ ; \text{ où } C_k = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i}\binom{n}{k-i}$$

D'où : $\left(\forall k \in \mathbb{N},\ C_k = \binom{2n}{k}\right)$

En particulier, pour $k = n$, on a :

$$\binom{2n}{n} = C_n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}\binom{n}{n-i}$$

or $\binom{n}{n-i} = \binom{n}{i}$, alors

$$\binom{2n}{n} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2$$

Rappel ⚠

$$P(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k \ ; \ Q(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k X^k$$

$$P(X)\,Q(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} C_k X^k \ ; \text{ où } C_k = \sum_{i=0}^{k} a_i\, b_{k-i}$$

2) Déterminer un nombre réel $c > 0$ tel que

$$\binom{2n}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} c\,\frac{4^n}{\sqrt{n}}$$

On rappelle la formule de Stirling :

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\,\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

$$(n!)^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\pi n \cdot \frac{n^{2n}}{e^{2n}}$$

$$(2n)! \underset{n\to\infty}{\sim} \sqrt{2\pi \cdot 2n} \cdot \left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}$$

$$\binom{2n}{n} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{\cancel{2}\cdot\sqrt{\pi n}\cdot 2^{2n}\cdot \cancel{n^{2n}}}{\cancel{e^{2n}}} \times \frac{\cancel{e^{2n}}}{\cancel{2}\pi n \cdot \cancel{n^{2n}}}$$

$$\binom{2n}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}\cdot\sqrt{n}\cdot 4^n}{\pi n}$$

$$\binom{2n}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{4^n}{\sqrt{n}}$$

$$\boxed{C = \frac{1}{\sqrt{\pi}}}$$

3) i) Si α est un élément de $]0,1[$, montrer , par exemple en utilisant une comparaison série-intégrale, que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$

$$\frac{1}{(k+1)^\alpha} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{t^\alpha}\,dt \leqslant \frac{1}{k^\alpha}$$

car $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est décroissante sur $[k, k+1]$.

Or $\frac{1}{(k+1)^\alpha} \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{1}{k^\alpha}$

Alors $\frac{1}{k^\alpha} \underset{k\to+\infty}{\sim} \int_k^{k+1} \frac{1}{t^\alpha}\,dt$

Or $\alpha < 1$ alors la série $\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{k^\alpha}$ diverge.

D'où $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=1}^{n}\left(\int_k^{k+1} \frac{1}{t^\alpha}\,dt\right)$

D'autre part

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\int_k^{k+1} \frac{1}{t^\alpha}\,dt\right) = \int_1^{n+1} \frac{1}{t^\alpha}\,dt$$

$$= \left[\frac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_1^{n+1}$$

$$= \frac{1}{1-\alpha}\underbrace{\left((n+1)^{1-\alpha} - 1\right)}_{\sim (n+1)^{1-\alpha} \sim n^{1-\alpha}}$$

Ainsi $\sum_{k=1}^{n}\left(\int_k^{k+1}\frac{1}{t^\alpha}\,dt\right) \sim \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$

or $\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^\alpha}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=1}^{n}\left(\int_k^{k+1}\frac{1}{t^\alpha}\,dt\right)$

D'où la conclusion

3) i) Si α est un élément de $]0,1[$, montrer , par exemple en utilisant une comparaison série-intégrale, que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$

ii) Si α est un élément de $]1,+\infty[$, montrer de même que

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$$

3) ii)

Comme on a fait pour 3) i), on a :

$$\frac{1}{k^\alpha} \underset{k\to+\infty}{\sim} \int_k^{k+1} \frac{1}{t^\alpha}\, dt$$

Or $\alpha > 1$ alors la série $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^\alpha}$ converge.

D'où $$\left(\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=n}^{+\infty}\left(\int_k^{k+1} \frac{1}{t^\alpha}\, dt\right)$$

On a : $$\sum_{k=n}^{+\infty}\left(\int_k^{k+1} \frac{1}{t^\alpha}\, dt\right) = \int_n^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\, dt$$

$$= \left[\frac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_n^{+\infty}$$

$$= \underbrace{\left(\lim_{t\to+\infty} \frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right)}_{=0} - \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$

$$= \frac{n^{1-\alpha}}{\alpha-1} = \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$$

D'où l'équivalence demandée $\square$

4) Pour $x \in [2, +\infty[$, on pose

$$I(x) = \int_2^x \frac{dt}{\ln(t)}$$

i) Justifier, pour $x \in [2, +\infty[$, la relation

$$I(x) = \frac{x}{\ln(x)} - \frac{2}{\ln(2)} + \int_2^x \frac{dt}{(\ln(t))^2}$$

Par intégration par parties.

$$I(x) = \int_2^x \frac{dt}{\ln t} = \int_2^x t' \cdot \frac{1}{\ln t}\, dt = \dots$$

$$I(x)=\int_2^x \frac{dt}{\ln(t)}$$

ii) Etablir par ailleurs la relation

$$\int_2^x \frac{dt}{(\ln(t))^2} \underset{x\to+\infty}{=} o\,(I(x))$$

On veut m. que :

$$\int_2^x \frac{1}{(\ln t)^2}\,dt \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\int_2^x \frac{1}{\ln t}\,dt\right)$$

Il suffit de vérifier que :

a) $\frac{1}{(\ln t)^2} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{\ln t}\right)$

b) $\int_2^{+\infty} \frac{1}{\ln t}\,dt$ diverge

Proposition 2 :

Soient $f : [a,b[\to \mathbb{K}$ et $g : [a,b[\to \mathbb{R}$ CPM avec g positive, où $a\in\mathbb{R}$ et $b\in\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$.

1) Si $\begin{cases} f(x) \underset{x\to b}{=} o(g(x)) \\ \int_a^b \text{g } \textit{diverge} \end{cases}$ alors $\int_a^x f \underset{x\to b}{=} o\left(\int_a^x g\right)$

2) Si $\begin{cases} f(x) \underset{x\to b}{=} O(g(x)) \\ \int_a^b \text{g } \textit{diverge} \end{cases}$ alors $\int_a^x f \underset{x\to b}{=} O\left(\int_a^x g\right)$

3) Si $\begin{cases} f(x) \underset{x\to b}{\sim} g(x) \\ \int_a^b \text{g } \textit{diverge} \end{cases}$ alors $\int_a^x f \underset{x\to b}{\sim} \int_a^x g$

Pour a) : c'est claire

Pour b) : $\int_2^{+\infty} \frac{1}{\ln t}\,dt$ diverge ; En effet :

On a $\frac{1}{\sqrt{t}} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{\ln t}\right)$

or $\int_2^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt$ diverge alors $\int_2^{+\infty} \frac{1}{\ln t}\,dt$ aussi.

Séries de Bertrand :

$$\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$$

Intégrales de Bertrand :

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha (\ln t)^\beta} dt$$

$\longrightarrow$ Hors programme.

$\longrightarrow$ (les techniques sont analogues).

$\longrightarrow$ $\begin{cases} \alpha > 1 : \text{ soit } 1 < \gamma < \alpha \\ \alpha < 1 : \text{ soit } \alpha < \gamma < 1 \end{cases}$

etc

i) Justifier, pour $x \in [2, +\infty[$, la relation

$$I(x) = \frac{x}{\ln(x)} - \frac{2}{\ln(2)} + \int_2^x \frac{dt}{(\ln(t))^2}$$

ii) Etablir par ailleurs la relation

$$\int_2^x \frac{dt}{(\ln(t))^2} \underset{n \to +\infty}{=} o\left(I(x)\right)$$

iii) En déduire finalement un équivalent de $I(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

3) iii) Déduisons $I(x) \underset{x \to +\infty}{\sim}$?

On a d'après i) et ii) :

$$I(x) \underset{x \to +\infty}{=} \left(\frac{x}{\ln x} - \frac{2}{\ln 2}\right) + o(I(x))$$

$$\left(\frac{x}{\ln x} - \frac{2}{\ln 2}\right) \underset{x \to +\infty}{=} I(x) + o(I(x))$$

$$\underbrace{\left(\frac{x}{\ln x} - \frac{2}{\ln 2}\right)}_{\sim \frac{x}{\ln x}} \underset{x \to +\infty}{\sim} I(x)$$

$f \sim g \iff f = g + o(g)$

D'où $\boxed{I(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{x}{\ln x}}$ $\square$

Piste 2 :

On a : $I(x) \underset{x \to +\infty}{=} \left(\frac{x}{\ln x} - \frac{2}{\ln 2}\right) + \int_2^x \frac{1}{(\ln t)^2} dt$

$$\Rightarrow \quad 1 = \frac{\left(\frac{x}{\ln x} - \frac{2}{\ln 2}\right)}{I(x)} + \underbrace{\frac{\int_2^x \frac{1}{(\ln t)^2} dt}{I(x)}}_{\xrightarrow[x \to +\infty]{} 0}$$

D'où $I(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \left(\frac{x}{\ln x} - \frac{2}{\ln 2}\right)$

$\Rightarrow \boxed{I(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{x}{\ln x}}$ $\square$

5) Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on admet que

$$\forall x \in]-1,1[\ ,\ (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

où

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(\alpha - k)}{n!}$$

Justifier la formule :

$$\forall x \in]-1,1[\ ,\ \frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{4^n} x^n$$

Pour $\alpha = \frac{-1}{2}$, on a :

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \text{ ; où } a_n = \frac{\prod_{k=0}^{n-1}\left(-\frac{1}{2} - k\right)}{n!}$$

$$a_n = \frac{\prod_{k=0}^{n-1}\left(-\frac{1}{2} - k\right)}{n!}$$

$$= \frac{1}{n!} \prod_{k=0}^{n-1}\left(-\frac{(2k+1)}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{n!} \frac{(-1)^n}{2^n} \cdot \prod_{k=0}^{n-1}(2k+1)$$

$$= \frac{(-1)^n}{n!\,2^n} \cdot 1 \times 3 \times \dots \times (2n-1)$$

$$= \frac{(-1)^n}{n!\,2^n} \cdot \frac{\left[1 \times 3 \times \dots \times (2n-1)\right] \times 2 \times 4 \times \dots \times (2n)}{2 \times 4 \times \dots \times (2n)}$$

$$= \frac{(-1)^n}{n!\,2^n} \cdot \frac{(2n)!}{2^n \cdot n!}$$

$$\boxed{a_n = \frac{(-1)^n}{4^n} \cdot \binom{2n}{n}}$$

Ainsi :

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n} \cdot \binom{2n}{n} x^n$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4^n} \binom{2n}{n} \cdot (-1)^n x^n$$

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{4^n} x^n}$$

$\square$