Prop 3 (Inégalité de Bessel)

Soit F un sev de dim finie de E. On a :

$$\forall x \in E, \ \boxed{\| P_F(x) \|} \leq \boxed{\| x \|}$$

Démo : $E = F \oplus F^{\perp}$ (car F de dim finie)

$x \in E$.

$P_F(x) \in F$

$$x = \underbrace{P_F(x)}_{F} + \underbrace{(x - P_F(x))}_{\in F^{\perp}}$$

Prop 3 (Inégalité ...)

Soit F un sev de dim finie de E. On a :

$$\forall x \in E, \ \|P_F(x)\| \leq \|x\|$$

Démo

On a $x = \underbrace{P_F(x)}_{\in F} + \underbrace{(x - P_F(x))}_{\in F^\perp}$

$\Rightarrow \|x\|^2 = \|P_F(x) + (x - P_F(x))\|^2$

$= \|P_F(x)\|^2 + \underbrace{\|x - P_F(x)\|^2}_{\geqslant 0}$ (via Pythagore, car $P_F(x)$ et $(x - P_F(x))$ sont orthogonaux)

$\geqslant \|P_F(x)\|^2$ $\square$

Prop 4

Pr. ELAMIRI Cours

Scanned with CamScanner

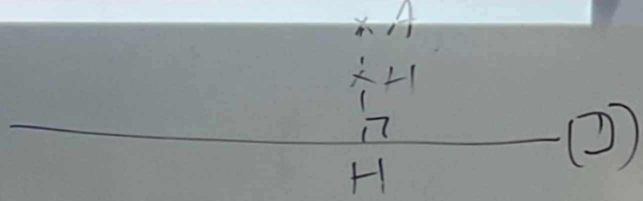
Prop 4

Soit F un sev de dim finie de E.

Soient $x, a \in E$, on a :

$$P_F(x) = a \iff \begin{cases} a \in F \\ (x-a) \in F^{\perp} \end{cases}$$

Demo



$$\begin{cases} (AH) \perp (D) \\ \text{et} \\ H \in D \end{cases}$$

NB

$$d(x,F) = \|x - P_F(x)\| = \inf_{y \in F} (\|x-y\|) = \min_{y \in F} (\|x-y\|)$$

Exercice d'application 2

Calculer :

1) $\inf_{a,b\in\mathbb{R}}\left(\int_0^1 (x^2-ax-b)^2\,dx\right)$ $\left(\text{ou } \min_{a,b\in\mathbb{R}}\left(\int_0^1 (x^2-ax-b)^2\,dx\right)\right)$

2) $\inf_{a,b\in\mathbb{R}}\left(\int_0^1 (x^2+ax+b)^2\,dx\right)$

3) $\inf_{a,b\in\mathbb{R}}\left(\int_0^1 (e^x+ax+b)^2\,dx\right)$

4) $\inf_{a,b,c\in\mathbb{R}}\left(\int_0^1 (x^3+ax^2+bx+c)^2\,dx\right)$

Scanned with CamScanner

Exercice 3

On considère l'application définie sur $M_n(\mathbb{R})^2$ par :

$$(A|B) = tr({}^tA.B)$$

1) Montrer que cette application est un produit scalaire pour lequel la base canonique est orthonormée. On note $||.||$ la norme associée.
2) Montrer que
$$\forall A \in M_n(\mathbb{R}), |tr(A)| \leq \sqrt{n}||A||$$
3) Quel l'orthogonal de S, l'espace des matrices symétriques ?
4) En déduire
$$inf_{(m_{ij})\in S}\left(\sum_{1\leq i,j\leq n}(A_{ij}-m_{ij})^2\right)$$
$A = (A_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ étant une matrice fixée.

Exercice 4

Calculer le minimum de la fonction $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ définie par

$$f(a,b,c) = \int_0^{+\infty}(x^3+ax^2+bx+c)^2e^{-2x}dx$$