Correction proposée par El Amdaoui
École Royale de l'Air-Marrakech.Maroc

Partie I

1.1.

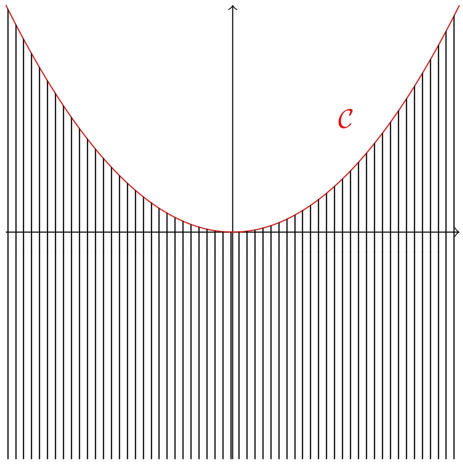
1.1.1. $A \in \mathcal{U}_2$ si, et seulement, si χ_A admet deux racines distinctes. Avec $\chi_A = X^2 - \operatorname{Tr}(A)X + \det(A)$ dont le discriminant $\Delta = (\operatorname{Tr}(A))^2 - 4\det(A)$, il vient que $A \in \mathcal{U}_2$ si, et seulement, si $(\operatorname{Tr}(A))^2 - 4\det(A) > 0$

1.1.2. $A \longmapsto \det(A)$ et $A \longmapsto \operatorname{Tr}(A)$ sont des fonctions polynomiales en coefficients de A, donc elles sont continues sur $M_n(\mathbb{R})$

1.1.3. Par les théorèmes généraux $\varphi = \operatorname{Tr}^2 - 4\det$ est continue sur $M_2(\mathbb{R})$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, puisque $\mathcal{U}_2 = \varphi^{-1}(]0, +\infty[)$ est l'image réciproque d'un ouvert par une fonction continue, donc il s'agit d'un ouvert de $M_2(\mathbb{R})$.

$\mathcal{U}_2 \neq \emptyset$, car $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{U}_2$

1.1.4. Notons $\mathcal{C}$ la courbe de l'application $x \longmapsto \dfrac{1}{4}x^2$



1.1.5. – Une matrice de $\mathcal{U}_2$ est carrée et elle admet deux valeurs propres distinctes, donc elle est diagonalisable.

– Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{V}_2$. Les valeurs propres de M sont $\lambda_1 = \dfrac{\operatorname{Tr}(M) - \sqrt{\operatorname{Tr}(M)^2 - 4\det(M)}}{2}$ et $\lambda_2 = \dfrac{\operatorname{Tr}(M) + \sqrt{\operatorname{Tr}(M)^2 - 4\det(M)}}{2}$. Le système $MX = \lambda X$, avec $\lambda \in \{\lambda_1, \lambda_2\}$ et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in M_{2,1}(\mathbb{R})$ fournit

$$\begin{cases} ax + by &= \lambda x \\ cx + dy &= \lambda y \end{cases} \Longleftrightarrow X \in \textbf{Vect}\left(\begin{pmatrix} b \\ \lambda - a \end{pmatrix}\right)$$

Posons alors $f(M) = \begin{pmatrix} b & b \\ \lambda_1 - a & \lambda_2 - a \end{pmatrix}$, on a bien $f(M) \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ et l'application f est continue car ses fonctions composantes sont continues. En outre

$$f(M)^{-1} M f(M) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

1.2.

1.2.1. Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$, on pose $M = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} m_{ij} E_{ij}$ avec $(E_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est la base canonique de $M_n(\mathbb{R})$. On a

$$AM = \sum_{1 \leqslant k,i,j \leqslant n} \alpha_k m_{ij} E_{kk} E_{ij} = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \alpha_i m_{ij} E_{ij}$$

et

$$MA = \sum_{1 \leqslant k,i,j \leqslant n} \alpha_k m_{ij} E_{ij} E_{kk} = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \alpha_j m_{ij} E_{ij}$$

Donc $AM = MA$ équivaut à $\forall i,j \in [\![1,n]\!]^2, \alpha_i m_{ij} = \alpha_j m_{ij}$ équivaut à $\forall i \neq j \in [\![1,n]\!]^2, m_{ij} = 0$. Ainsi $\mathcal{C}(A)$ est l'ensemble de matrices diagonales

1.2.2. L'égalité $UAU^{-1} = VAV^{-1}$ équivaut à $V^{-1}UA = AV^{-1}U$ ou encore équivaut à $V^{-1}U \in \mathcal{C}(A)$. Avec $\mathcal{C}(A)$ égale l'ensemble des matrices diagonales

1.3. Notons M_i la ième colonne de M et posons $D = \mathbf{diag}(d_1, \cdots, d_n)$

$$\begin{aligned}
P^{-1}MP = D &\iff MP = PD \\
&\iff \forall i \in [\![1,n]\!], \quad [MP]_i = [PD]_i \\
&\iff \forall i \in [\![1,n]\!], \quad MP_i = PD_i \\
&\iff \forall i \in [\![1,n]\!], \quad MP_i = d_i P_i \\
&\iff \forall i \in [\![1,n]\!], \quad P_i \ \overrightarrow{\text{vp}} \text{ de } M \text{ associé à la vp } d_i
\end{aligned}$$

Partie II

2.1. On montre que $O_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$
- $O_n(\mathbb{R}) \subset \mathrm{GL}_n(R)$, $I_n \in O_n(\mathbb{R})$.
- Soient $A, B \in O_n(\mathbb{R})$.
  AB est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = {}^tB\,{}^tA = {}^t(AB)$ donc $AB \in O_n(\mathbb{R})$.
- Soit $A \in O_n(\mathbb{R})$.
  A^{-1} est inversible et $\left(A^{-1}\right)^{-1} = \left({}^tA\right)^{-1} = {}^t(A^{-1})$ donc $A^{-1} \in O_n(\mathbb{R})$.

Donc $O_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $(\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \times)$.
$\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ est le noyau de morphisme de groupes det, donc c'est un sous-groupe de $O_n(\mathbb{R})$

2.2. Soit $M = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ tel que $a^2 + b^2 = 1$, on a bien

$${}^tMM = I_2 \quad \text{et} \quad \det(M) = a^2 + b^2 = 1$$

Donc $M \in \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$.
Inversement soit $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$, les relations ${}^tMM = I_2$ et $M\,{}^tM = I_2$ entraînent le système $\begin{cases} a^2 + b^2 & = 1 \\ c^2 + d^2 & = 1 \end{cases}$ et le calcul du déterminant de M donne $ad - bc = 1$, ainsi on obtient

$$(a-d)^2 + (b+c)^2 = a^2 + d^2 + c^2 + b^2 + 2(bc - ad) = 0$$

Donc $d = a$ et $c = -b$

2.3.

2.3.1. Φ est continue car ses fonctions composantes sin et cos sont continues

2.3.2. Soit $\theta \in \mathbb{R}$, d'après la question **2.2.**, la matrice $\Phi(\theta)$ appartient à $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$. Ainsi la première inclusion $\Phi(\mathbb{R}) \subset \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$.
Inversement soit $M \in \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$, d'après la question **2.2.**, il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que

$a^2+b^2=1$ et $M=\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$. Mais l'égalité $a^2+b^2=1$ assure l'existence d'un réel $\theta\in\mathbb{R}$ tel que $a=\cos\theta$ et $b=\sin\theta$ et par suite $M=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}=\Phi(\theta)$. On en déduit la deuxième inclusion $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})\subset\Phi(\mathbb{R})$

2.3.3. $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})=\Phi(\mathbb{R})$ est l'image de $\mathbb{R}$, qui est connexe par arcs, par une application continue, donc c'est un connexe par arcs

2.4. Le groupe $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs pour $n\geqslant 3$

2.4.1. $U\in\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ si, et seulement, si $\det(U)=1$. Or

$$\det(U)=\det\left(P^{-1}UP\right)=\det(-I_q)\prod_{i=1}^{r}\det(\Phi(\theta_i))=(-1)^q$$

Cette dernière valeur vaut 1 si, et seulement, si q est pair

2.4.2. Soit $U\in\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})\setminus\{I_n\}$

(i) On écrit

$${}^tPUP=\begin{pmatrix} I_p & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -I_q & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \Phi(\theta_1) & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \Phi(\theta_r) \end{pmatrix}$$

On ne peut pas avoir à la fois $r=0$ et $q=0$ car $U\neq I_n$. Ainsi si $q=0$ c'est fini, sinon q est pair et la matrice $-I_q$ peut s'exprimer par blocs

$$-I_q=\begin{pmatrix} -I_2 & & & (0) \\ & -I_2 & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & -I_2 \end{pmatrix}\in M_q(\mathbb{R})$$

Puisque $-I_2=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}=\Phi(\pi)$, on prend alors $\phi_1=\cdots=\phi_{\frac{q}{2}}=\pi$ et on change d'indice pour obtenir l'expression demandée

(ii) Il est clair que Γ à valeurs dans $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ et que $\Gamma(0)=I_n$ et $\Gamma(1)=U$. L'application

$$t\in[0,1]\longmapsto\begin{pmatrix} I_p & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \Phi(t\theta_1) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \Phi(t\theta_s) \end{pmatrix}\in\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$$

est continue car ses composantes son continues à savoir les identités de $\mathbb{R}$ et les fonctions $t\in[0,1]\longmapsto\cos(t\theta_i)$ et $t\in[0,1]\longmapsto\sin(t\theta_i)$. En outre

$$A\in\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})\longmapsto PA{}^tP$$

est continue, car c'est la restriction d'une application linéaire en dimension finie. Ainsi par composition Γ est continue sur $[0,1]$

2.4.3. Soient $U_1,U_2,\in\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$.

- Si l'une des matrices U_1 ou U_2 égale I_n, c'est fini
- Sinon, soit Γ_1 (resp Γ_2) le chemin défini auparavant joignant I_n et U_1 (resp I_n et U_2). On considère l'application Γ définie sur $[0,1]$ par

$$\Gamma(t)=\begin{cases} \Gamma_1(1-2t) & \text{si } t\in[0,\frac{1}{2}] \\ \Gamma_2(2t-1) & \text{si } t\in[\frac{1}{2},1] \end{cases}$$

Γ est continue sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ et elle vérifie $\Gamma(0)=U_1$ et $\Gamma(1)=U_2$

2.5. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$

2.5.1. L'application $M \longmapsto {}^tM$ est linéaire de en dimension finie, donc elle est continue sur $M_n(\mathbb{R})$

2.5.2. Notons que pour tout $U \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$, $U^{-1} = {}^tU$, donc l'application $U \longmapsto U^{-1}$ est continue sur $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ car elle est la restriction d'une application continue

2.5.3. L'application $X \in M_n(\mathbb{R}) \longmapsto \left(X, {}^tX\right)$ est continue car elle est linéaire en dimension finie. De plus l'application $(X,Y) \in M_n^2(\mathbb{R}) \longmapsto XAY$ est bilinéaire en dimension finie, donc elle est continue, puis par composition

$$X \in M_n(\mathbb{R}) \longmapsto XA^tX \in M_n(\mathbb{R})$$

est continue sur $M_n(\mathbb{R})$. Puisque $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs et pour tout $U \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$, ${}^tU = U^{-1}$, alors l'ensemble considéré est l'image d'un connexe par arcs par une application continue donc il s'agit d'un connexe par arcs

Partie III

3.1.

3.1.1 D'après la question **1.3.** les colonnes de $f_2(M)$ sont les vecteurs propres de M. Par hypothèse les valeurs propres de M sont simples. Notons λ_i la valeur propre associé à $C_i(M)$ où $i \in \{1,2\}$. D'une part, on a

$${}^tC_1(M)\,MC_2(M) = \lambda_2{}^tC_1(M)\,C_2(M)$$

Et d'autre part

$${}^tC_1(M)\,MC_2(M) = {}^t(MC_1(M))C_2(M) = \lambda_1{}^tC_1(M)\,C_2(M)$$

Donc $\lambda_1 < C_1(M), C_2(M) >= \lambda_2 < C_1(M), C_2(M) >$, et comme $\lambda_1 \neq \lambda_2$ alors $< C_1(M), C_2(M) >= 0$

3.1.2 Les deux vecteurs colonnes $\dfrac{C_1(M)}{\| C_1(M) \|}$ et $\dfrac{C_2(M)}{\| C_2(M) \|}$ constitue une famille orthonormée, donc la matrice considérée est orthogonale

3.1.3 On a $\alpha(M) = \pm 1$, la matrice $g_2(M)$ est orthogonale et $\det(g_2(M)) = \alpha^2(M) = 1$, donc $g_2(M) \in \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$

3.1.4 Les fonctions C_1 et C_2 sont continues : Elles sont les composantes de f_2 vue comme applications de $M_2(\mathbb{R})$ à valeurs dans $M_{2,1}(\mathbb{R}) \times M_{2,1}(\mathbb{R})$. Par composition $M \longmapsto \| C_i(M) \|$ est continue et elle ne s'annule pas sur $\mathcal{U}_2$, donc les deux fonctions $M \longmapsto \dfrac{C_i(M)}{\| C_i(M) \|}$ sont continues. Enfin $\alpha : M \longmapsto \det\left(\dfrac{C_1(M)}{\| C_1(M) \|}, \dfrac{C_2(M)}{\| C_2(M) \|}\right)$ est continue car $\det : M_{2,1}(\mathbb{R}) \times M_{2,1}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ est bilinéaire. Ainsi g_2 est continue. Pour $M\mathcal{U}_2 \cap S_2(\mathbb{R})$, les vecteurs $\alpha(M)\dfrac{C_1(M)}{\| C_1(M) \|}$ et $\dfrac{C_2(M)}{\| C_2(M) \|}$ sont propres de M et ils constituent les vecteurs colonnes de $g_2(M)$, alors , d'après la question **1.3.**, la matrice $g_2(M)^{-1}Mg_2(M)$ est diagonale

3.2. On considère une matrice diagonale $B = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$, avec $\alpha \neq \beta$

3.2.1. Soit $A \in S_B$, alors A est semblable à B, donc elle admet deux valeurs propres distinctes et par suite $A \in \mathcal{U}_2$. En outre pour toute matrice $U \in \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$, on a $U^{-1} = {}^tU$ et

$${}^t\left(UB^tU\right) = {}^t{}^tU^tB^tU = UB^tU$$

Donc $UBU^{-1} \in S_2(\mathbb{R})$

3.2.2. Le résultat de la question **3.1.4.** affirme que la matrice $h_2(M)^{-1}Mh_2(M)$ est diagonale. De plus la matrice M est semblable aux deux matrices B et $h_2(M)^{-1}Mh_2(M)$, alors par transitivité $h_2(M)^{-1}Mh_2(M)$ et B sont semblables. La matrice $h_2(M)^{-1}Mh_2(M)$ est diagonale dont les éléments de la diagonale sont α et β, donc il n'y a que deux valeurs possibles de $h_2(M)^{-1}Mh_2(M)$ qui sont B et $B' = \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$

3.2.3. L'application $M \longmapsto h_2(M)^{-1}Mh_2(M)$ est continue sur le connexe par arcs à valeurs dans $\{B, B'\}$, avec $B \neq B'$, donc elle est constante, car sinon $\{B, B'\}$ sera connexe par arcs dans $M_2(\mathbb{R})$, ce qui est absurde

3.2.4. Si la constante vaut B c'est fini, sinon $h_2(M)^{-1}Mh_2(M) = \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$. Dans un tel cas la première (resp deuxième) colonne de $h_2(M)$ est un vecteur propre de M associé à la valeur propre β (resp α), alors pour obtenir B il faut permuter les colonnes de $h_2(M)$. On redéfinit $g_2(M)$ comme étant la matrice dont la première colonne $\alpha(M)\dfrac{C_2(M)}{\parallel C_2(M) \parallel}$ et dont la deuxième colonne $\dfrac{C_2(M)}{\parallel C_2(M) \parallel}$, avec $\alpha(M) = \det\left(\dfrac{C_2(M)}{\parallel C_2(M) \parallel}, \dfrac{C_1(M)}{\parallel C_1(M) \parallel}\right)$

3.3

3.3.1. Soit $U \in \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ et posons $M = UBU^{-1}$, la relation $h_2(M)^{-1}Mh_2(M) = B$ donne $h_2(M)^{-1}UBU^{-1}h_2(M) = B$, soit

$$h_2(M)^{-1}UB = Bh_2(M)^{-1}U$$

La matrice B vérifie les conditions de la question **1.2.** et $h_2(M)^{-1}U$ une matrice commutant avec B, donc d'après la question **1.2.1.** la matrice $h_2(M)^{-1}U$ est diagonale. $h_2(M)^{-1}U \in \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$, alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $h_2(M)^{-1}U = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ et puisque elle est diagonale, alors $\sin\theta = 0$, soit $\theta \equiv 0 \quad [\pi]$, en conséquence

$$h_2(M)^{-1}U = \pm I_2$$

3.3.2. Les deux applications φ_2 et ψ_2 sont bien définies.
– Pour $U \in \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$, on a :

$$\begin{aligned} \psi_2 \circ \varphi_2(U) &= \psi_2\left(UBU^{-1}, h_2\left(UBU^{-1}\right)^{-1}U\right) \\ &= h_2\left(UBU^{-1}\right)h_2\left(UBU^{-1}\right)^{-1}U \\ &= U \end{aligned}$$

Donc $\psi_2 \circ \varphi_2 = \mathrm{id}_{\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})}$
– Soit $(M, D) \in S_B \times \{-I_2, I_2\}$, on a :

$$\begin{aligned} \varphi_2 \circ \psi_2(M, D) &= \varphi_2(h_2(M)D) \\ &= \left(M_B, h_2(M_B)^{-1}h_2(M)D\right) \end{aligned}$$

Avec

$$\begin{aligned} M_B &= h_2(M)DBD^{-1}h_2(M)^{-1} \\ &= h_2(M)Bh_2(M)^{-1} \\ &= M \end{aligned}$$

Il vient que

$$\varphi_2 \circ \psi_2(M, D) = \left(M, h_2(M)^{-1}h_2(M)D\right) = (M, D)$$

Donc $\varphi_2 \circ \psi_2 = \mathrm{id}_{S_B \times \{-I_2, I_2\}}$

Donc les applications φ_2 et ψ_2 sont des bijections réciproques l'une de l'autre

3.3.3. L'application $U \longmapsto h_2\left(UBU^{-1}\right)$ est continue sur $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ à valeurs dans $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$, d'après la question **2.5.2.** l'application $U \longmapsto h_2\left(UBU^{-1}\right)^{-1}$ est continue sur $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$. Puis $U \longmapsto h_2\left(UBU^{-1}\right)^{-1}U$ et par composition par la trace qui est linéaire en dimension finie, alors la fonction considérée est continue sur $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
D'après la question **3.3.1**, pour tout $U \in \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$, $h_2\left(UBU^{-1}\right)^{-1}U = \pm I_2$, donc $\mathrm{Tr}\left(h_2\left(UBU^{-1}\right)^{-1}U\right) \in \{-2, 2\}$. La question **3.3.2** montre que φ est une bijection, donc I_2 et $-I_2$ admettent des antécédents, donc l'ensemble des valeurs prises est exactement $\{-2, 2\}$

3.3.4. $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ est connexe par arcs dont l'image, par une application continue, égale $\{-2, 2\}$ qui n'est pas connexe. Ce qui est absurde. Donc une telle fonction f_2 n'existe pas

Partie IV

4.1.

4.1.1 D'après la question **1.3.** les colonnes de $f_n(M)$ sont les vecteurs propres de M. Par hypothèse les valeurs propres de M sont simples. Notons λ_i la valeur propre associé à $C_i(M)$ où $i \in [\![1, n]\!]$. D'une part, on a pour tout $i, j \in [\![1, n]\!]$ tels que $i \neq j$:

$$^tC_i(M)\,MC_j(M) = \lambda_j\,{}^tC_i(M)\,C_j(M)$$

Et d'autre part

$$^tC_i(M)\,MC_j(M) = {}^t(MC_i(M))C_j(M) = \lambda_i\,{}^tC_i(M)\,C_j(M)$$

Donc $\lambda_i < C_i(M), C_j(M) >= \lambda_j < C_i(M), C_j(M) >$, et comme $\lambda_i \neq \lambda_j$ alors $< C_i(M), C_j(M) >= 0$. Ainsi la famille $(C_1(M), \cdots, C_n(M))$ est orthogonale, et puisqu'elle est sans vecteur nul, donc la famille $\left(\dfrac{C_1(M)}{\| C_1(M) \|}, \cdots, \dfrac{C_n(M)}{\| C_n(M) \|}\right)$ est orthonormale dans $M_{n,1}(\mathbb{R})$ qui est de dimension n, donc c'est une BON

4.1.2 On a $\alpha(M) = \pm 1$, la matrice $g_n(M)$ est orthogonale car la famille constituée de ses vecteurs colonnes est orthonormée, en outre $\det(g_n(M)) = \alpha^2(M) = 1$, donc $g_n(M) \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$

4.1.3 Les fonctions $(C_i)_{i=1}^n$ sont continues : Elles sont les composantes de f_n vue comme applications de $M_n(\mathbb{R})$ à valeurs dans $M_{n,1}(\mathbb{R})^n$. Par composition pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, l'application $M \longmapsto \| C_i(M) \|$ est continue et elle ne s'annule pas sur $\mathcal{U}_n$, donc les fonctions $M \longmapsto \dfrac{C_i(M)}{\| C_i(M) \|}$ sont continues. Enfin $\alpha : M \longmapsto \det\left(\dfrac{C_i(M)}{\| C_i(M) \|}, \cdots, \dfrac{C_n(M)}{\| C_n(M) \|}\right)$ est continue car $\det : M_{n,1}(\mathbb{R})^n \longrightarrow \mathbb{R}$ est multinéaire. Ainsi g_n est continue. Pour $M \in \mathcal{U}_n \cap S_n(\mathbb{R})$, les vecteurs $\alpha(M)\dfrac{C_1(M)}{\| C_1(M) \|}$, $\dfrac{C_2(M)}{\| C_2(M) \|}, \cdots \dfrac{C_n(M)}{\| C_n(M) \|}$ sont propres de M et ils constituent les vecteurs colonnes de $g_n(M)$, alors , d'après la question **1.3.**, la matrice $g_n(M)^{-1}Mg_n(M)$ est diagonale

4.2. On considère une matrice diagonale $A = \mathbf{diag}(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$, avec $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ deux à deux distincts

4.2.1. Soit $M \in S_A$, alors M est semblable à A, donc elle admet n valeurs propres distinctes et par suite $M \in \mathcal{U}_n$. En outre pour toute matrice $U \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$, on a $U^{-1} = {}^tU$ et

$$^t\left(UA^tU\right) = {}^{tt}U\,{}^tA\,{}^tU = UA^tU$$

Donc $UAU^{-1} \in S_n(\mathbb{R})$

4.2.2. Le résultat de la question **3.1.4.** affirme que la matrice $h_n(M)^{-1}Mh_n(M)$ est diagonale. De plus la matrice M est semblable aux deux matrices B et $h_n(M)^{-1}Mh_n(M)$, alors par transitivité $h_n(M)^{-1}Mh_n(M)$ et B sont semblables. Donc il n'y a que $n!$ valeurs possibles de $h_n(M)^{-1}Mh_n(M)$ qui sont $\mathbf{diag}\left(\alpha_{\sigma(1)},\cdots,\alpha_{\sigma(n)}\right)$, avec σ parcourt le groupe symétrique $\mathcal{G}_n$

4.2.3. L'application $M\longmapsto h_n(M)^{-1}Mh_n(M)$ est continue sur le connexe par arcs à valeurs dans $\{\mathbf{diag}\left(\alpha_{\sigma(1)},\cdots,\alpha_{\sigma(n)}\right),\ \sigma\in\mathcal{G}_n\}$, donc elle est constante, car sinon $\{\mathbf{diag}\left(\alpha_{\sigma(1)},\cdots,\alpha_{\sigma(n)}\right),\ \sigma\in\mathcal{G}_n\}$ sera connexe par arcs dans $M_n(\mathbb{R})$, ce qui est absurde

4.2.4. Il existe $\sigma\in\mathcal{G}_n$ tel que $h_n(M)^{-1}Mh_n(M)=\mathbf{diag}\left(\alpha_{\sigma(1)},\cdots,\alpha_{\sigma(n)}\right)$. On redéfinit la matrice dont la ième colonne est le vecteur $\dfrac{C_k(M)}{\|C_k(M)\|}$ associé à la valeur propre α_i, puis $\alpha(M)$, comme auparavant, le déterminant de cette matrice construite et enfin $g_n(M)$ la matrice obtenue de cette dernière en multipliant sa première colonne par $\alpha(M)$

4.3

4.3.1. Soit $U\in\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ et posons $M=UAU^{-1}$, la relation $h_n(M)^{-1}Mh_n(M)=A$ donne $h_n(M)^{-1}UAU^{-1}h_n(M)=A$, soit

$$h_n(M)^{-1}UA=Ah_n(M)^{-1}U$$

La matrice A vérifie les conditions de la question **1.2.** et $h_n(M)^{-1}U$ une matrice commute avec A, donc d'après la question **1.2.1.** la matrice $h_n\left(UAU^{-1}\right)^{-1}U$ est diagonale.

4.3.2. $\mathcal{D}_n=\left\{\mathbf{diag}(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n),\ \varepsilon_i\in\{-1,1\}\text{ et }\prod\limits_{i=1}^{n}\varepsilon_i=1\right\}$ est un ensemble fini car

$$\varphi:\left\{\begin{array}{ccc}\mathcal{D}_n & \longrightarrow & \{-1,1\}^n\\ \mathbf{diag}(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n) & \longmapsto & (\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)\end{array}\right.$$

est injective et $\{-1,1\}^n$ un ensemble fini de cardinal 2^n.

Le cardinal de $\mathcal{D}_n$ est le nombre de n-uplets $(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)$ de $\{-1,1\}^n$ pour lesquels $\prod\limits_{i=1}^{n}\varepsilon_i=1$, qui vaut aussi le nombre de n-uplets $(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)$ de $\{-1,1\}^n$ qui contiennent un nombre pair de composantes valant -1, ce nombre vaut $\sum\limits_{0\leqslant 2s\leqslant n}C_n^{2s}=2^{n-1}$, donc $\mathbf{Card}(\mathcal{D}_n)=2^{n-1}$

4.3.3. Les deux applications φ_n et ψ_n sont bien définies.

– Pour $U\in\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$, on a :

$$\begin{aligned}\psi_n\circ\varphi_n(U) &= \psi_n\left(UAU^{-1},h_n\left(UAU^{-1}\right)^{-1}U\right)\\ &= h_n\left(UAU^{-1}\right)h_n\left(UAU^{-1}\right)^{-1}U\\ &= U\end{aligned}$$

Donc $\psi_2\circ\varphi_2=\mathrm{id}_{\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})}$

– Soit $(M,D)\in S_B\times\mathcal{D}_n$, on a :

$$\begin{aligned}\varphi_n\circ\psi_n(M,D) &= \varphi_n\left(h_n(M)D\right)\\ &= \left(M_A,h_n(M_A)^{-1}h_n(M)D\right)\end{aligned}$$

Avec

$$\begin{aligned}M_A &= h_n(M)DAD^{-1}h_n(M)^{-1}\\ &= h_n(M)Ah_n(M)^{-1}\\ &= M\end{aligned}$$

Il vient que

$$\varphi_n \circ \psi_n (M, D) = \Big(M, h_n (M)^{-1} h_n (M) D\Big) = (M, D)$$

Donc $\varphi_n \circ \psi_n = \mathrm{id}_{S_B \times \mathcal{D}_n}$

Donc les applications φ_2 et ψ_2 sont des bijections réciproques l'une de l'autre

4.3.4. D'après la question **4.1.3** l'application $U \longmapsto h_n \left(UAU^{-1}\right)$ est continue sur $\mathrm{SO}_n (\mathbb{R})$ à valeurs dans $\mathrm{SO}_n (\mathbb{R})$, d'après la question **2.5.2.** l'application $U \longmapsto h_n \left(UBU^{-1}\right)^{-1}$ est continue sur $\mathrm{SO}_n (\mathbb{R})$. Puis $U \longmapsto h_n \left(UBU^{-1}\right)^{-1} U$ et par composition par la trace qui est linéaire en dimension finie, alors la fonction considérée est continue sur $\mathrm{SO}_2 (\mathbb{R})$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

D'après la question **4.3.3.** pour tout $U \in \mathrm{SO}_n (\mathbb{R})$, $h_n \left(UBU^{-1}\right)^{-1} U \in \mathcal{D}_n$, donc $\mathrm{Tr}\Big(h_n \left(UBU^{-1}\right)^{-1} U\Big) \in \mathrm{Tr} (\mathcal{D}_n)$. La question **4.3.3.** montre que φ_n est une bijection, donc tout élément de $\mathcal{D}_n$ admet un antécédent, donc l'ensemble des valeurs prises est exactement $\mathrm{Tr} (\mathcal{D}_n)$

4.3.5. $\mathrm{SO}_n (\mathbb{R})$ est connexe par arcs dont l'image par une application continue égale $\mathrm{Tr} (\mathcal{D}_n)$, qui n'est pas un intervalle, qui n'est pas connexe. Ce qui est absurde, car les connexes par arcs de $\mathbb{R}$ sont les intervalles. Donc une telle fonction f_n n'existe pas