

1. J_n est symétrique réelle donc d'après le théorème spectral elle est (ortho)diagonalisable.
2. Notons $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$ et $\|\cdot\|$ la norme associée.
On considère une base orthonormée de vecteurs propres $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$. Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ il existe λ_i tel que $J_n v_i = \lambda_i v_i$. On peut supposer les λ_i ordonnés : $\lambda_1 = \lambda_{\min} \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n = \lambda_{\max}$.

Soit $x \in \Lambda_n$. On a $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^n 1 = n$. Soit $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ les coordonnées de x dans $\mathcal{B}$, de sorte que

$$x = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i. \text{ Comme } \mathcal{B} \text{ est orthonormée on a aussi } \|x\|^2 = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2. \text{ Ainsi}$$

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq i, j \leq n} J_n(i, j) x_i x_j &= \langle J_n x, x \rangle \\ &= \left\langle \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i v_i, \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha_i^2 \quad (\text{car } \mathcal{B} \text{ est orthonormée}) \\ &\leq \lambda_{\max} \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 = n \lambda_{\max}. \end{aligned}$$

L'autre inégalité s'obtient de la même façon.

3. $-\beta < 0$ donc le résultat de 2. donne l'encadrement :

$$-\frac{1}{2} n \beta \lambda_{\max} \leq -\frac{\beta}{2} \sum_{1 \leq i, j \leq n} J_n(i, j) x_i x_j \leq -\frac{1}{2} n \beta \lambda_{\min}.$$

De plus $-1 \leq x_i \leq 1$ donne en sommant : $-n \leq \sum_{i=1}^n x_i \leq n$, et $h \geq 0$, donc

$$-nh \leq -h \sum_{i=1}^n x_i \leq nh.$$

En sommant les deux encadrements ci-dessus, on obtient

$$n \left(-h - \beta \frac{\lambda_{\max}}{2} \right) \leq H_n(h, x) \leq n \left(h - \beta \frac{\lambda_{\min}}{2} \right).$$

4. Si J_n est orthogonale alors $\langle J_n \rangle \subset \{-1, 1\}$. En effet pour $\lambda \in \langle J_n \rangle$ et v un vecteur propre associé on a $\|v\| = \|J_n v\| = \|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \|v\|$, donc $|\lambda| = 1$ car $\|v\| > 0$.
On a donc $-1 \leq \lambda_{\min} \leq \lambda_{\max} \leq 1$, et donc :

$$n \left(-h - \frac{\beta}{2} \right) \leq H_n(h, x) \leq n \left(h + \frac{\beta}{2} \right).$$

Remarque. En fait, avec l'hypothèse $J_n \neq \pm I_n$, on a plus précisément $\lambda_{\min} = -1$ et $\lambda_{\max} = 1$. Mais cette information n'améliore pas l'encadrement, donc je ne saisis pas l'intérêt de cette hypothèse dans l'énoncé.

5. • On a $J_n^{(C)} = \begin{pmatrix} 0 & & (1/n) \\ & \ddots & \\ (1/n) & & 0 \end{pmatrix}$, donc $U_n = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$. On remarque que $U_n^2 = nU_n$, et (I_n, U_n)

est libre donc le polynôme minimal de U_n est $X^2 - nX$. Celui-ci possède deux racines 0 et n , donc

$$(U_n) = \{0, n\}.$$

• Pour $\alpha \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}^n$ on a l'équivalence :

$$U_n x = \alpha x \Leftrightarrow J_n^{(C)} x = \frac{\alpha - 1}{n} x.$$

On déduit de cette remarque que U_n et $J_n^{(C)}$ ont mêmes vecteurs propres, et que

$$(J_n^{(C)}) = \left\{ \frac{\alpha - 1}{n}, \alpha \in (U_n) \right\} = \left\{ -\frac{1}{n}, \frac{n-1}{n} \right\}.$$

6. On note $S_p(x) = \sum_{k=1}^p \cos(2kx)$ dans tout ce corrigé.

Par parité de $\cos$, et avec $\cos(0) = 1$, on a $2S_p(x) + 1 = \sum_{k=-p}^p \cos(2kx)$. Or

$$\begin{aligned} \sum_{k=-p}^p \cos(2kx) &= \Re \left(\sum_{k=-p}^p (e^{i2x})^k \right) \\ &= \Re \left(\frac{e^{i(2p+2)x} - e^{-i2px}}{e^{i2x} - 1} \right) \\ &= \Re \left(\frac{e^{i(2p+1)x} - e^{-i(2p+1)x}}{e^{ix} - e^{-ix}} \right) \\ &= \Re \left(\frac{2i \sin((2p+1)x)}{2i \sin(x)} \right) = \frac{\sin((2p+1)x)}{\sin(x)}, \end{aligned}$$

d'où le résultat voulu.

7. Notons C_j la j -ème colonne de $J_n^{(S)}$. Il s'agit de vérifier que $(C_1, \dots, C_n)$ est orthonormée. On obtient, par exemple après application des formules d'Euler, la relation :

$$\sin(\theta) \sin(\theta') = \frac{1}{2} (\cos(\theta - \theta') - \cos(\theta + \theta')).$$

• Pour $j_1 \neq j_2$ on a

$$\begin{aligned} \langle C_{j_1}, C_{j_2} \rangle &= \frac{4}{2n+1} \sum_{i=1}^n \sin \left(\frac{2\pi}{2n+1} j_1 i \right) \sin \left(\frac{2\pi}{2n+1} j_2 i \right) \\ &= \frac{2}{2n+1} \sum_{i=1}^n \left[\cos \left(\frac{2\pi}{2n+1} (j_1 - j_2) i \right) - \cos \left(\frac{2\pi}{2n+1} (j_1 + j_2) i \right) \right] \\ &= \frac{1}{2n+1} \left[\frac{\sin(\pi(j_1 - j_2))}{\sin(\pi(j_1 - j_2)/(2n+1))} - 1 - \frac{\sin(\pi(j_1 + j_2))}{\sin(\pi(j_1 + j_2)/(2n+1))} + 1 \right] \\ &= 0 \quad \text{car } \sin \text{ s'annule sur } \pi\mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Remarque. Nous avons pu appliquer le résultat de 6 avec $x = \frac{\pi}{2n+1}(j_1 - j_2)$ puis $x = \frac{\pi}{2n+1}(j_1 + j_2)$ car ils n'appartiennent pas à $\pi\mathbb{Z}$: en effet ces deux réels sont dans l'intervalle $] -\pi, \pi[$ car $j_1 + j_2$ et $j_1 - j_2$ appartiennent à $[-2n, 2n]$.

- Pour $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$\begin{aligned}
\langle C_j, C_j \rangle &= \frac{4}{2n+1} \sum_{i=1}^n \sin^2 \left(\frac{2\pi}{2n+1} j i \right) \\
&= \frac{2}{2n+1} \sum_{i=1}^n \left[1 - \cos \left(\frac{4\pi}{2n+1} j i \right) \right] \\
&= \frac{2}{2n+1} \left[n - \frac{1}{2} \left(\frac{\sin(2\pi j)}{\sin \frac{2\pi j}{2n+1}} - 1 \right) \right] \\
&= \frac{2}{2n+1} \left(n + \frac{1}{2} \right) \quad \text{car } \sin(2\pi j) = 0. \\
&= 1.
\end{aligned}$$

8. On a $C_{n,1} = \begin{pmatrix} 0 & & & 1 \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $C_{n,n-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 1 & & & 0 \end{pmatrix}$, donc $J_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

On reconnaît bien la matrice d'adjacence du graphe représenté dans l'énoncé.

```

9. def mat_adj(graphe):
    L=[[0]*n for k in range(n)]
    for i in graphe:
        for j in graphe[i]:
            L[i][j] = 1
    return L

```

10. Plutôt que de poser le produit matriciel (laborieux), raisonnons avec l'endomorphisme ϕ associé à $C_{n,1}$, et la base canonique $(e_1, \dots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$. On a

$$\phi(e_1) = e_2, \phi(e_2) = e_3, \dots, \phi(e_{n-1}) = e_n, \phi(e_n) = e_1.$$

Ainsi par applications successives de ϕ , on a :

$$\phi^k(e_1) = e_{k+1}, \phi^k(e_2) = e_{k+2}, \dots, \phi^k(e_{n-k}) = e_n, \phi^k(e_{n-k+1}) = e_1, \dots, \phi^k(e_n) = e_k.$$

Ainsi $C_{n,1}^k$, la matrice canoniquement associée à ϕ^k , est bien la matrice $C_{n,k}$.

11. *Remarque.* Vu la question suivante, le «spectre» désigne ici le spectre **complexe** de $C_{n,1}$. Je pense qu'il aurait été préférable que ce soit précisé explicitement.

On a $C_{n,1}^n = C_{n,n} = I_n$, autrement dit $C_{n,1}$ est annulée par le polynôme

$$P = X^n - 1 = \prod_{k=1}^n (X - \alpha_k)$$

où $\alpha_k := e^{ik\frac{2\pi}{n}}$. Ainsi $\langle C_{n,1} \rangle \subset \{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}\}$.

Remarque. Autrement dit $\langle C_{n,1} \rangle \subset \cup_n$, le groupe des racines n -èmes de l'unité.

L'inclusion réciproque est vraie aussi. En effet pour $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$,

$$\text{le vecteur } V_k = \begin{pmatrix} \alpha_k^{n-1} \\ \alpha_k^{n-2} \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \text{ vérifie : } C_{n,1} V_k = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha_k^{n-1} \\ \vdots \\ \alpha_k \end{pmatrix} = \alpha_k V_k, \quad \text{et donc } \alpha_k \in \langle C_{n,1} \rangle.$$

On a donc finalement ${}^{\circ}(C_{n,1}) = \cup_n$.

12. On remarque que $J_n^{(1)} = C_{n,1} + C_{n,1}^{-1}$, et que par ailleurs $\lambda_k = \alpha_k + \overline{\alpha_k} = \alpha_k + \alpha_k^{-1}$. Comme $C_{n,1}$ admet n valeurs propres distinctes, elle est diagonalisable. Soit donc $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que

$$P^{-1}C_{n,1}P = \begin{pmatrix} \alpha_0 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_{n-1} \end{pmatrix}.$$

On a alors

$$P^{-1}(C_{n,1})^{-1}P = (P^{-1}C_{n,1}P)^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha_0^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_{n-1}^{-1} \end{pmatrix}.$$

Ainsi par somme,

$$P^{-1}J_n^{(1)}P = \begin{pmatrix} \alpha_0 + \alpha_0^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_{n-1} + \alpha_{n-1}^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_0 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Ceci montre que les valeurs propres de $J_n^{(1)}$ sont les réels λ_k , $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$.

13. On vérifie sans peine (non détaillé ici), en se basant sur la définition du produit de Kronecker, que pour des matrices $A, A_1, A_2 \in \mathcal{M}_{u,v}(\mathbb{R})$ et $B, B_1, B_2 \in \mathcal{M}_{r,s}(\mathbb{R})$, on a

$$(\lambda A_1 + \mu A_2) \otimes B = \lambda A_1 \otimes B + \mu A_2 \otimes B, \quad A \otimes (\lambda B_1 + \mu B_2) = \lambda A \otimes B_1 + \mu A \otimes B_2.$$

14. Il suffit de vérifier l'égalité bloc par bloc entre les deux membres de cette égalité.

En effectuant un produit matriciel par blocs, on constate que le bloc en position (i, j) dans la matrice $(A \otimes B)(A' \otimes B')$ est :

$$\sum_{k=1}^v a_{i,k} B a'_{k,j} B' = \left(\sum_{k=1}^v a_{i,k} a'_{k,j} \right) B B' = (A A')_{i,j} B B',$$

qui est aussi le bloc en position (i, j) de la matrice $(A A') \otimes (B B')$.

15. Remarquons que si $P \in \mathcal{M}_u(\mathbb{R})$ et $Q \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$ sont deux matrices carrées inversibles, alors d'après la question précédente :

$$(P \otimes Q)(P^{-1} \otimes Q^{-1}) = (P P^{-1}) \otimes (Q Q^{-1}) = I_u I_r = I_{ur},$$

ce qui montre que $P \otimes Q$ est inversible, d'inverse $P^{-1} \otimes Q^{-1}$.

Sous nos hypothèses, il existe $P \in \mathcal{M}_u(\mathbb{R})$ et $Q \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$ inversibles telles que

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_u \end{pmatrix}, \quad Q^{-1}BQ = \begin{pmatrix} \mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_r \end{pmatrix}.$$

On a donc

$$(P^{-1} \otimes Q^{-1})(A \otimes B)(P \otimes Q) = (P^{-1}AP) \otimes (Q^{-1}BQ) = \text{Diag}(\lambda_1 \mu_1, \dots, \lambda_u \mu_1, \dots, \lambda_1 \mu_r, \dots, \lambda_u \mu_r).$$

Ceci montre que $A \otimes B$ est diagonalisable, et que

$${}^{\circ}(A \otimes B) = \{\lambda_i \mu_j, (i, j) \in \llbracket 1, u \rrbracket \times \llbracket 1, r \rrbracket\} = \{\lambda \mu, \lambda \in {}^{\circ}(A), \mu \in {}^{\circ}(B)\}.$$

16. On a, par blocs : $J_9^{(2)} = \begin{pmatrix} J_3^{(1)} & & \\ & J_3^{(1)} & \\ & & J_3^{(1)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} O & I_n & I_n \\ I_n & 0 & I_n \\ I_n & I_n & 0 \end{pmatrix}$. Sous forme développée :

$$J_9^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On reconnaît bien la matrice d'adjacence du graphe représenté dans l'énoncé.

17. Reprenons les notations de la question 12 : $P^{-1}J_n^{(1)}P = \Delta$, où $\Delta := \begin{pmatrix} \lambda_0 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_{n-1} \end{pmatrix}$.

On remarque que

$$\begin{aligned} (P \otimes P)^{-1}J_N^{(2)}(P \otimes P) &= (P^{-1}I_nP) \otimes (P^{-1}J_n^{(1)}P) + (P^{-1}J_n^{(1)}P) \otimes (P^{-1}I_nP) \\ &= I_n \otimes \Delta + \Delta \otimes I_n \\ &= \text{Diag}(\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}, \lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}, \dots, \lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}) \\ &\quad + \text{Diag}(\lambda_0, \dots, \lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, \dots, \lambda_{n-1}) \end{aligned}$$

ce qui montre que les valeurs propres de $J_N^{(2)}$ sont les coefficients diagonaux dans la matrice diagonale obtenue, c'est-à-dire les valeurs $\lambda_i + \lambda_j$, $i, j \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$.

18. ψ_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ par opérations sur des fonctions dérivables (avec $Z_n(h) > 0$ pour tout $h \in \mathbb{R}_+$).

De plus, on a $\frac{\partial H_n}{\partial h}(h, x) = -\sum_{i=1}^n x_i$, donc

$$\begin{aligned} \psi'_n(h) &= \frac{1}{n} \frac{Z'_n(h)}{Z_n(h)} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{x \in \Lambda_n} \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \frac{e^{-H_n(h, x)}}{Z_n(h)} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{x \in \Lambda_n} \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \mathbb{P}((X_{n,1}, \dots, X_{n,n}) = (x_1, \dots, x_n)) \\ &= \frac{1}{n} \mathbb{E} \left(\sum_{i=1}^n X_{n,i} \right) \quad (\text{théo. transfert}) \\ &= \mathbb{E}(M_{n,h}) = m_n(h). \end{aligned}$$

19. Avec la convention proposée par l'énoncé, on a

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} J_n(i, j) x_i x_j = \sum_{i=1}^n (x_i x_{i+1} + x_i x_{i-1}) = 2 \sum_{i=1}^n x_i x_{i+1}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
e^{-H_n(h,x)} &= \exp \left(\beta \sum_{i=1}^n x_i x_{i+1} + h \sum_{i=1}^n x_i \right) \\
&= \exp \left(\sum_{i=1}^n \beta x_i x_{i+1} + h x_i \right) \\
&= \prod_{i=1}^n \exp(\beta x_i x_{i+1} + h x_i),
\end{aligned}$$

d'où l'égalité demandée pour $Z_n(h)$.

20. Par récurrence sur p .

- Pour $p = 2$, $(M^p)_{i,j} = \sum_{k=1}^q M_{i,k_2} M_{k_2,j}$ est la définition du produit matriciel.
- En supposant la propriété vraie à un rang p , on a

$$\begin{aligned}
(M^{p+1})_{i,j} &= \sum_{\ell=1}^q (M^p)_{i,\ell} M_{\ell,j} \\
&= \sum_{\ell=1}^q \sum_{1 \leq k_2, \dots, k_p \leq q} M_{i,k_2} \left(\prod_{r=2}^{p-1} M_{k_r, k_{r+1}} \right) M_{k_p, \ell} M_{\ell,j} \\
&= \sum_{1 \leq k_2, \dots, k_p, k_{p+1} \leq q} M_{i,k_2} \left(\prod_{r=2}^p M_{k_r, k_{r+1}} \right) M_{k_{p+1}, j} \quad \text{en renommant } \ell \text{ par } k_{p+1}
\end{aligned}$$

21. On remarque que $A_{i,j} = \exp((-1)^i h + (-1)^{i+j} \beta)$.

On a

$$(A^n)_{i,i} = \sum_{(k_2, \dots, k_n) \in \{1,2\}^{n-1}} A_{i,k_2} A_{k_2,k_3} \dots A_{k_{n-1},k_n} A_{k_n,i}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\text{tr}(A^n) &= \sum_{k_1=1}^2 (A^n)_{k_1,k_1} = \sum_{(k_1, \dots, k_n) \in \{1,2\}^n} A_{k_1,k_2} A_{k_2,k_3} \dots A_{k_{n-1},k_n} A_{k_n,k_1} \\
&= \sum_{(k_1, \dots, k_n) \in \{1,2\}^n} \left(\prod_{r=1}^{n-1} \exp((-1)^{k_r} h + (-1)^{k_r+k_{r+1}} \beta) \right) \cdot \exp((-1)^{k_n} h + (-1)^{k_n+k_1} \beta)
\end{aligned}$$

Puis, en modifiant les indices de la somme à l'aide de la bijection

$$(k_1, \dots, k_n) \in \{1,2\}^n \mapsto ((-1)^{k_1}, \dots, (-1)^{k_n}) \in \Lambda_n,$$

on obtient (avec la convention $x_{n+1} = x_1$) :

$$\begin{aligned}
\text{tr}(A^n) &= \sum_{(x_1, \dots, x_n) \in \Lambda_n} \left(\prod_{r=1}^{n-1} \exp(x_r h + x_r x_{r+1} \beta) \right) \exp(x_n h + x_n x_1 \beta) \\
&= \sum_{(x_1, \dots, x_n) \in \Lambda_n} \left(\prod_{r=1}^n \exp(x_r h + x_r x_{r+1} \beta) \right) = Z_n(h).
\end{aligned}$$

22. Notons $B = e^\beta$ et $H = e^h$ pour alléger les notations. On a

$$\text{chi}_A = X^2 - \left(\frac{B}{H} + BH \right) X + B^2 - \frac{1}{B^2}.$$

Le discriminant est

$$\Delta = \frac{B^2}{H^2} + B^2 H^2 + 2B^2 - 4B^2 + \frac{4}{B^2} = B^2 \left(H - \frac{1}{H} \right)^2 + \frac{4}{B^2}$$

Ainsi les valeurs propres de A sont les réels $\lambda < \mu$, avec :

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{1}{2} \left(e^\beta e^h + e^\beta e^{-h} + \sqrt{e^{2\beta} (e^h - e^{-h})^2 + 4e^{-2\beta}} \right) \\ &= e^\beta \operatorname{ch}(h) + \sqrt{e^{2\beta} \operatorname{sh}(h)^2 + e^{-2\beta}} \end{aligned}$$

Si l'on veut une expression qui colle avec la question suivante, avec $\operatorname{sh}^2 = \operatorname{ch}^2 - 1$ on arrive à

$$\begin{aligned} \mu &= e^\beta \operatorname{ch}(h) + \sqrt{e^{2\beta} \operatorname{ch}(h)^2 + e^{-2\beta} - e^{2\beta}} \\ &= e^\beta \operatorname{ch}(h) + \sqrt{e^{2\beta} \operatorname{ch}(h)^2 - 2\operatorname{sh}(2\beta)}. \end{aligned}$$

De même $\lambda = e^\beta \operatorname{ch}(h) - \sqrt{e^{2\beta} \operatorname{ch}(h)^2 - 2\operatorname{sh}(2\beta)}$.

23. Comme A^n est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} \lambda^n & \\ & \mu^n \end{pmatrix}$, on a

$$\psi_n(h) = \frac{1}{n} \ln(\operatorname{tr}(A^n)) = \frac{1}{n} \ln(\lambda^n + \mu^n) = \ln(\mu) + \frac{1}{n} \ln \left(1 + \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ln(\mu),$$

car $\left| \frac{\lambda}{\mu} \right| < 1$, ce qui entraîne que $\ln \left(1 + \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. D'où la conclusion voulue d'après l'expression de μ à la question précédente.

24. Nous savons que $\forall h \geq 0$, $\psi(h) = \ln(\mu(h))$, où $\mu(h) := e^\beta \operatorname{ch}(h) + \sqrt{e^{2\beta} \operatorname{ch}(h)^2 - 2\operatorname{sh}(2\beta)}$.

Ainsi pour $h > 0$, $m(h) = \frac{\mu'(h)}{\mu(h)}$, avec $\mu'(h) = e^\beta \operatorname{sh}(h) + \frac{2e^{2\beta} \operatorname{sh}(h) \operatorname{ch}(h)}{2\sqrt{e^{2\beta} \operatorname{ch}(h)^2 - 2\operatorname{sh}(2\beta)}}$.

L'expression dans la racine tend vers $e^{-2\beta} \neq 0$ donc par opérations $\mu'(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0^+} 0$.

Par ailleurs $\mu(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0^+} e^\beta + e^{-\beta} \neq 0$, donc finalement $m_+ = \lim_{h \rightarrow 0^+} m(h) = 0$.

25. On utilise dans la suite la notation $\sum_{i \neq j}$ pour alléger la notation : $\sum_{(i,j) \in [1,n]^2, i \neq j}$.

On remarque que $s_n(x)^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 + \sum_{i \neq j} x_i x_j = n + \sum_{i \neq j} x_i x_j$, donc :

$$\begin{aligned} Z_n(h) &= \sum_{x \in \Lambda_n} \exp \left(\frac{\beta}{2} \sum_{i \neq j} \frac{1}{n} x_i x_j + h \sum_{i=1}^n x_i \right) \\ &= \sum_{x \in \Lambda_n} \exp \left(\frac{\beta}{2} \left(\frac{s_n(x)^2}{n} - 1 \right) + h s_n(x) \right) \\ &= e^{-\beta/2} \sum_{x \in \Lambda_n} \exp \left(\frac{\beta}{2n} s_n(x)^2 + h s_n(x) \right) \end{aligned}$$

26. La fonction $x \mapsto e^{-x^2/2}$ est continue sur $\mathbb{R}$, paire, et $e^{-x^2/2} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ par croissance comparée, donc elle est intégrable en $+\infty$ et en $-\infty$.

En conclusion l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2} dx$ est convergente.

27. Soit $u \in \mathbb{R}$ et $a > 0$.

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(ut - \frac{t^2}{2a}\right) dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(u\sqrt{a}t - \frac{t^2}{2}\right) \sqrt{a} dt \quad (\text{changement de variable } \tilde{t} = \frac{t}{\sqrt{a}}) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}(t - u\sqrt{a})^2\right) \exp\left(\frac{au^2}{2}\right) \sqrt{a} dt \\
&= \sqrt{a} e^{\frac{au^2}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}(t - u\sqrt{a})^2\right) dt \\
&= \sqrt{a} e^{\frac{au^2}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) dx \quad (\text{changement de variable } x = t - u\sqrt{a}) \\
&= \sqrt{2\pi a} e^{\frac{au^2}{2}},
\end{aligned}$$

d'où l'égalité demandée.

28. En appliquant le résultat précédent avec $u = s_n(x)$ et $a = \frac{\beta}{n}$, on obtient :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{(t+h)s_n(x)} e^{-\frac{nt^2}{2\beta}} dt = e^{hs_n(x)} \sqrt{\frac{2\pi\beta}{n}} e^{\frac{\beta}{2n} s_n(x)^2}.$$

En multipliant par $\sqrt{\frac{n}{2\pi\beta}} e^{-\frac{\beta}{2}} = \sqrt{\frac{n}{2e^\beta\pi\beta}}$, puis en sommant pour $x \in \Lambda_n$, on obtient d'après 25. :

$$\sqrt{\frac{n}{2e^\beta\pi\beta}} \sum_{x \in \Lambda_n} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(t+h)s_n(x)} e^{-\frac{nt^2}{2\beta}} dt = Z_n(h).$$

D'où par linéarité de l'intégrale :

$$Z_n(h) = \sqrt{\frac{n}{2e^\beta\pi\beta}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{x \in \Lambda_n} e^{(t+h)s_n(x)} \right) e^{-\frac{nt^2}{2\beta}} dt.$$

29. On a

$$\begin{aligned}
\sum_{x \in \Lambda_n} \prod_{i=1}^n e^{(t+h)x_i} &= \sum_{x_1 \in \{-1,1\}} \sum_{x_2 \in \{-1,1\}} \dots \sum_{x_n \in \{-1,1\}} e^{(t+h)x_1} e^{(t+h)x_2} \dots e^{(t+h)x_n} \\
&= \left(\sum_{x_1 \in \{-1,1\}} e^{(t+h)x_1} \right) \left(\sum_{x_2 \in \{-1,1\}} e^{(t+h)x_2} \right) \dots \left(\sum_{x_n \in \{-1,1\}} e^{(t+h)x_n} \right) \\
&= (2\text{ch}(t+h)) (2\text{ch}(t+h)) \dots (2\text{ch}(t+h)) = (2\text{ch}(t+h))^n.
\end{aligned}$$

30. Comme $\prod_{i=1}^n e^{(t+h)x_i} = e^{(t+h)s_n(x)}$, on a en sommant pour $x \in \Lambda_n$ puis en intégrant :

$$\begin{aligned}
Z_n(h) &= \sqrt{\frac{n}{2e^\beta\pi\beta}} \int_{-\infty}^{+\infty} (2\text{ch}(t+h))^n e^{-\frac{nt^2}{2\beta}} dt \\
&= \sqrt{\frac{n}{2e^\beta\pi\beta}} \int_{-\infty}^{+\infty} (2\text{ch}(x))^n e^{-\frac{n(x-h)^2}{2\beta}} dx \quad (\text{changt. variable } x = t+h) \\
&= \sqrt{\frac{n}{2e^\beta\pi\beta}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(n\left(\ln(2\text{ch}(x)) - \frac{(x-h)^2}{2\beta}\right)\right) dx \\
&= \sqrt{\frac{n}{2e^\beta\pi\beta}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-nG_h(x)} dx.
\end{aligned}$$

31. Le calcul donne (en notant $\text{th} = \frac{\text{sh}}{\text{ch}}$) :

$$G'_h(x) = \frac{1}{\beta}(x-h) - \text{th}(x) \quad G''_h(x) = \frac{1}{\beta} - \frac{1}{\text{ch}^2(x)}.$$

On vérifie aisément que th est impaire, strictement croissante, et $\text{th}(0) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \text{th}(x) = +\infty$.

De plus $G'_h(0) = -\frac{h}{\beta} \leq 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} G'_h(x) = +\infty$.

• Cas $\beta > 1$. Il existe un unique $v_h > 0$ tel que $\text{ch}^2(v_h) = \beta$. De plus :

- sur $[0, v_h[$, G''_h est strictement négative, donc G'_h est strictement décroissante ;
- sur $]v_h, +\infty[$, G''_h est strictement positive, donc G'_h est strictement croissante.

Or $G'_h(0) \leq 0$ donc G'_h est strictement négative sur $]0, v_h[$.

Par ailleurs comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} G'_h(x) = +\infty$, le t.v.i. donne l'existence d'un unique réel $u_h \in]v_h, +\infty[$ tel que $G'_h(u_h) = 0$, et G'_h est strictement négative sur $[v_h, u_h[$ et strictement positive sur $]u_h, +\infty[$.

Conclusion. G_h est strictement décroissante sur $[0, u_h]$ et strictement croissante sur $[u_h, +\infty[$.

Donc G_h atteint son minimum sur $\mathbb{R}_+$ en u_h uniquement.

• Cas $\beta \in]0, 1]$. Alors G''_h est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$, donc G'_h strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, donc on peut distinguer deux sous-cas :

- si $h = 0$, alors $G'_h(0) = 0$ et G'_h est strictement positive sur $]0, +\infty[$, donc G_h est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ et admet donc un minimum sur $\mathbb{R}_+$, qui est atteint uniquement en 0.
- si $h > 0$, alors G'_h s'annule sur $\mathbb{R}_+$ en un unique réel $u_h > 0$, et comme ci-dessus on aboutit à la conclusion que G_h possède un minimum, atteint uniquement en u_h .

Pour ce qui est des autres propriétés :

(a) a déjà été montré ci-dessus.

(b) idem car $u_h > v_h > 0$.

(c) (i) a déjà été montré ci-dessus, y compris dans le cas $\beta \leq 1$, $h = 0$: dans ce cas $u_h = 0$ et $G'_h(0) = 0$.

(ii) on a $G'_h(u_h) = \frac{u_h - h}{\beta} - \text{th}(u_h) = 0$, donc $G'_0(u_h) = \frac{u_h}{\beta} - \text{th}(u_h) = \frac{h}{\beta}$. Donc $h = \beta G'_0(u_h)$.

(iii) si $h > 0$ alors dans les deux cas ($\beta > 1$ et $\beta \leq 1$), nous avons vu que G''_h est strictement positive sur un intervalle qui contient u_h ($]v_h, +\infty[$ dans le premier cas, $\mathbb{R}_+^*$ dans le second cas). Donc $G''_h(u_h) > 0$.

32. Puisque $h > 0$, ch étant paire, on a pour $x < 0$:

$$\forall x < 0, |x - h| > |-x - h|, \quad \text{donc} \quad G_h(x) > G_h(-x) \geq G_h(u_h).$$

Ainsi l'unique point u_h où G_h atteint un minimum sur $\mathbb{R}_+$ est aussi l'unique point où elle atteint son minimum sur $\mathbb{R}$.

33. Notons dans la suite $\mu_h := \min(G_h) = G_h(u_h)$.

On a d'après 30. :

$$\begin{aligned} \psi_n(h) &= \frac{1}{2n} \ln \left(\frac{n}{2e^\beta \pi \beta} \right) + \frac{1}{n} \ln \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-nG_h(s)} ds \right) \\ &= \frac{1}{2n} \ln \left(\frac{n}{2e^\beta \pi \beta} \right) + \frac{1}{n} \ln \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-nG_h(x+u_h)} dx \right) \quad \text{avec } s = x + u_h \\ &= \frac{1}{2n} \ln \left(\frac{n}{2e^\beta \pi \beta} \right) + \frac{1}{n} \ln \left(e^{-n\mu_h} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-n\hat{G}_h(x)} dx \right) \\ &= -\mu_h - \frac{1}{2n} \ln \left(2e^\beta \pi \beta \right) + \frac{\ln(n)}{2n} + \frac{1}{n} \ln \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-n\hat{G}_h(\frac{t}{\sqrt{n}})} dt \right) \quad \text{avec } x = \frac{t}{\sqrt{n}} \\ &= -\mu_h - \frac{1}{2n} \ln \left(2e^\beta \pi \beta \right) + \frac{1}{n} \ln \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-n\hat{G}_h(\frac{t}{\sqrt{n}})} dt \right) \quad \text{car } \frac{1}{n} \ln \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right) = -\frac{\ln(n)}{2n} \end{aligned}$$

34. f_h est déjà continue en tout point de $\mathbb{R}^*$, par opérations.

Ensuite, G_h étant de classe $\mathcal{C}^2$ on peut écrire son développement limité à l'ordre 2 en u_h :

$$G(x + u_h) \underset{x \rightarrow 0}{=} G_h(u_h) + \underbrace{G'_h(u_h)}_{=0} x + \frac{\gamma_h}{2} x^2 + o(x^2),$$

d'où

$$\frac{G(x + u_h) - G_h(u_h)}{x^2} = f_h(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{\gamma_h}{2} + o(1).$$

Autrement dit, $\lim_{x \rightarrow 0} f_h(x) = \frac{\gamma_h}{2}$, ce qui montre bien que f_h est prolongeable par continuité en 0.

35. Faisons le point sur f_h (cette fonction ayant été prolongée par continuité). Les informations suivantes sont suffisantes pour conclure :

(i) $f_h(0) = \frac{\gamma_h}{2} > 0$, d'après 31(c)(iii);

(ii) f_h est strictement positive sur $\mathbb{R}$ car $\forall x > 0$, $G_h(x + u_h) > G_h(u_h)$, d'après 31;

(iii) Comme $\ln(2\cosh(x)) \leq \ln(2e^x) \underset{x \rightarrow \pm\infty}{=} o(x^2)$, on a $\widehat{G}_h(x) \underset{x \rightarrow \pm\infty}{\sim} \frac{x^2}{2\beta}$, donc $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f_h(x) = \frac{1}{2\beta} > 0$.

Par la définition de limite, il existe $K > 0$ tel que f_h est minorée par $\frac{1}{4\beta}$ sur $\mathbb{R} \setminus [-K, K]$.

Sur $[-K, K]$, f_h étant strictement positive et continue, elle est minorée par un réel $\delta > 0$ d'après le théorème des bornes atteintes.

D'où la conclusion voulue avec $c_h = \min\left(\frac{1}{4\beta}, \delta\right)$.

36. Fixons $h > 0$. On a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-n\widehat{G}_h(\frac{t}{\sqrt{n}})} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2 f_h(\frac{t}{\sqrt{n}})} dt$$

On peut appliquer le théorème de convergence dominée à la suite de fonctions $F_n : t \mapsto e^{-t^2 f_h(\frac{t}{\sqrt{n}})}$. En effet,

- d'après 34., et par opérations, on a pour tout $t \in \mathbb{R}$: $\lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(t) = e^{-\frac{\gamma_h}{2} t^2}$. Donc (F_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction $F : t \mapsto e^{-\frac{\gamma_h}{2} t^2}$.

- d'après 35., on a : $\forall t \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*, |F_n(t)| \leq e^{-c_h t^2}$.

Or $t \mapsto e^{-c_h t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, on le vérifie de la même manière qu'en 26.).

Conclusion. On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-n\widehat{G}_h(\frac{t}{\sqrt{n}})} dt \right) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\gamma_h}{2} t^2} dt$.

Or le changement de variable $s = \sqrt{\gamma_h} t$ donne $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\gamma_h}{2} t^2} dt = \frac{1}{\sqrt{\gamma_h}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{s^2}{2}} ds = \sqrt{\frac{2\pi}{\gamma_h}}$.

Enfin, en faisant tendre $n \rightarrow \infty$ dans 33, on obtient par opérations sur les limites :

$$\psi(h) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \psi_n(h) = -G_h(u_h).$$

37. Nous savons d'après 31. que $G'_0(u_0) = 0$, que $\lim_{x \rightarrow +\infty} G'_0(x) = +\infty$, et que G''_0 est strictement positive sur $]u_0, +\infty[$, donc G'_0 est strictement croissante sur $]u_0, +\infty[$. Ainsi d'après le théorème de la bijection monotone, G'_0 réalise une bijection de $]u_0, +\infty[$ vers $\mathbb{R}_+$.

Notons $R : \mathbb{R}_+ \mapsto]u_0, +\infty[$ la réciproque de cette bijection. Nous savons d'après ce même théorème que R est continue sur $\mathbb{R}_+$, et de plus comme G'_0 est dérivable et que G''_0 ne s'annule pas sur $]u_0, +\infty[$ nous savons aussi que R est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

D'après 31(c)(ii), on a $G'_0(u_h) = \frac{h}{\beta}$, il suffit donc de vérifier que $u_h \in [u_0, +\infty[$, pour en déduire que $u_h = R\left(\frac{h}{\beta}\right)$ et que, par composition de fonctions continues/dérivables, la fonction $h \mapsto u_h$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Vérifions donc que $u_h \geq u_0$:

- si $\beta \leq 1$, c'est une évidence car $u_0 = 0$ et $u_h \geq 0$;
- si $\beta > 1$, on a $G'_h(u_0) = G'_0(u_0) - \frac{h}{\beta} = -\frac{h}{\beta} \leq 0$.
Avec l'étude faite en 31, ceci entraîne que $u_0 \in [0, u_h]$.

38. D'après 36., on a :

$$\forall h > 0, \psi(h) = -\frac{(u(h) - h)^2}{2\beta} + \ln(2 \operatorname{ch}(u(h))).$$

Ainsi ψ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ par opérations sur des fonctions dérivables. Et on a :

$$\forall h > 0, m(h) = \psi'(h) = -\frac{(u'(h) - 1)(u(h) - h)}{\beta} + u'(h)\operatorname{th}(u(h)).$$

Mais par ailleurs $G'_h(u(h)) = \frac{u(h) - h}{\beta} - \operatorname{th}(u(h)) = 0$ donc $\operatorname{th}(u(h)) = \frac{u(h) - h}{\beta}$.
Ceci entraîne une simplification dans l'expression de $m(h)$ ci-dessus :

$$m(h) = \frac{u(h) - h}{\beta} \left[-u'(h) + 1 + u'(h) \right] = \frac{u(h) - h}{\beta}.$$

39. Pour tout $\beta > 0$, comme u est continue sur $\mathbb{R}_+$ on a : $m+ = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{u(h) - h}{\beta} = \frac{u(0)}{\beta}$.

D'où la conclusion voulue car d'après 31., $u(0) > 0$ si $\beta > 1$ et $u(0) = 0$ si $\beta \leq 1$.

40. Notons $A(t)$ l'expression dans l'intégrale. Soit K un majorant de $|f|$ sur $\mathbb{R}$. On a pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$|A(t)| \leq \mathbb{E} \left(\left| f \left(\frac{t}{n^{1/4}} + n^{1/4} M_n \right) \right| \right) \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \leq \mathbb{E}(K) \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}} = K \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}},$$

or $t \mapsto K \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, donc la fonction A l'est aussi.

Remarque. En toute rigueur il fallait aussi justifier que A était aussi continue (par morceaux), ce qui découle rapidement de la continuité de f et du fait que M_n soit une v.a. finie : ainsi l'expression

$$A(t) = \sum_{v \in M_n(\Omega)} \mathbb{P}(M_n = v) f \left(\frac{t}{n^{1/4}} + n^{1/4} v \right) \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}}$$

montre que A est continue, comme somme de fonctions continues.

41. On remarque que $\mathbb{E}(f(n^{1/4} M_n)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{E}(f(n^{1/4} M_n)) \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dt$.

Ainsi par inégalité triangulaire dans $\int$ et par linéarité de l'espérance,

$$\begin{aligned} |E_{n,f} - \mathbb{E}(f(n^{1/4} M_n))| &= \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\mathbb{E} \left(f \left(\frac{t}{n^{1/4}} + n^{1/4} M_n \right) \right) - \mathbb{E}(f(n^{1/4} M_n)) \right) \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dt \right| \\ &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \mathbb{E} \left(f \left(\frac{t}{n^{1/4}} + n^{1/4} M_n \right) - f(n^{1/4} M_n) \right) \right| \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dt \end{aligned}$$

Ensuite par inégalité triangulaire dans l'espérance,

$$\begin{aligned} |E_{n,f} - \mathbb{E}(f(n^{1/4}M_n))| &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{E} \left| f\left(\frac{t}{n^{1/4}} + n^{1/4}M_n\right) - f(n^{1/4}M_n) \right| \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dt \\ &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{K|t|e^{-t^2/2}}{n^{1/4}\sqrt{2\pi}} dt \quad (\star) \end{aligned}$$

Il reste à remarquer que la fonction dans l'intégrale est paire, et que

$$\int_0^{+\infty} |t|e^{-t^2/2} dt = \int_0^{+\infty} te^{-t^2/2} dt = \left[-e^{-t^2/2}\right]_0^{+\infty} = 1,$$

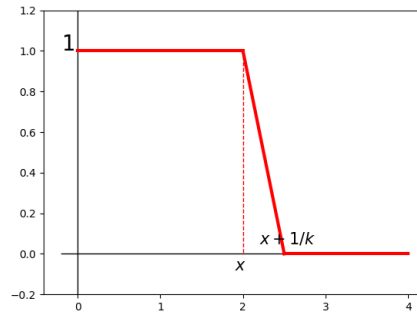
pour conclure que l'intégrale $(\star)$ est égale à $\frac{2K}{n^{1/4}\sqrt{2\pi}}$.

Le majorant obtenu nous donne par comparaison : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (E_{n,f} - \mathbb{E}(f(n^{1/4}M_n))) = 0$.

Enfin, en écrivant $\mathbb{E}(f(n^{1/4}M_n)) = E_{n,f} - (E_{n,f} - \mathbb{E}(f(n^{1/4}M_n)))$, on obtient par somme de limites :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(f(n^{1/4}M_n)) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\varphi_{\infty}(u)du.$$

42. Une représentation graphique de f_k nous aide à y voir plus clair :



on vérifie que $f_k(u) = 1 - \int_0^u \delta(t)dt$, où δ est une fonction continue par morceaux (plus précisément en escalier) définie par :

$$\delta(u) = k\mathbb{1}_{[x, x + \frac{1}{k}]}(u) = \begin{cases} k, & \text{si } u \in [x, x + \frac{1}{k}], \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

On remarque que δ_k est positive et bornée par k . Prenons $u, v \in \mathbb{R}$ (on peut supposer $u \leq v$ sans perte de généralité). On a :

$$|f_k(u) - f_k(v)| = \int_u^v \delta(t)dt \leq \int_u^v k \cdot dt = k(v - u),$$

ce qui montre que f_k est k -lipschitzienne.

43. k étant fixé, on a l'encadrement $g \leq f_k \leq h$, où

$$g(u) = \mathbb{1}_{]-\infty, x]}(u), \quad h(u) = \mathbb{1}_{]-\infty, x + \frac{1}{k}]}(u).$$

Par conséquent par croissance de l'espérance :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(n^{1/4}M_n \leq x) &= \mathbb{E}(g(n^{1/4}M_n)) \\ &\leq \mathbb{E}(f_k(n^{1/4}M_n)) \end{aligned}$$

f_k étant k -lipschitzienne, la question 41. donne donc l'existence d'un rang n_0 à partir duquel

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(n^{1/4}M_n \leq x) &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \int_{-\infty}^{+\infty} f_k(u)\varphi_{\infty}(u)du \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \int_{-\infty}^{+\infty} h(u)\varphi_{\infty}(u)du \\ &= \frac{\varepsilon}{2} + \int_{-\infty}^{x+\frac{1}{k}} \varphi_{\infty}(u)du.\end{aligned}$$

44. Fixons $\varepsilon > 0$. Comme $x \mapsto \int_{-\infty}^x \varphi_{\infty}(u)du$ est continue (primitive d'une fonction continue), et que $\frac{1}{k} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$, on peut commencer par choisir k_0 assez grand pour que

$$\int_{-\infty}^{x+\frac{1}{k_0}} \varphi_{\infty}(u)du \leq \frac{\varepsilon}{2} + \int_{-\infty}^x \varphi_{\infty}(u)du.$$

En appliquant le résultat de la question 43. à cet entier k_0 , on peut prendre n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$,

$$\mathbb{P}(n^{1/4}M_n \leq x) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \int_{-\infty}^{x+\frac{1}{k_0}} \varphi_{\infty}(u)du \leq \varepsilon + \int_{-\infty}^x \varphi_{\infty}(u)du.$$

On montre de la même manière, en utilisant la fonction

$$\tilde{f}_k : u \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} 1, & \text{si } u \leq x - \frac{1}{k}, \\ 1 - k(u - x + \frac{1}{k}), & \text{si } x - \frac{1}{k} < u \leq x, \\ 0, & \text{si } u > x, \end{cases}$$

que l'on encadre entre les fonctions $\mathbb{1}_{]-\infty, x-\frac{1}{k}]}$ et $\mathbb{1}_{]-\infty, x]}$, qu'il existe n_1 tel que pour tout $n \geq n_1$,

$$\mathbb{P}(n^{1/4}M_n \leq x) \geq -\varepsilon + \int_{-\infty}^x \varphi_{\infty}(u)du.$$

On a donc bien le résultat voulu puisque pour $n \geq \max(n_0, n_1)$ on a alors

$$\left| \mathbb{P}(n^{1/4}M_n \leq x) - \int_{-\infty}^x \varphi_{\infty}(u)du \right| \leq \varepsilon.$$